

Éric Akkermans et Gilles Montambaux

Physique mésoscopique
des électrons
et des photons

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture : Intensité réfléchie (albédo) par un échantillon de billes de polystyrène, obtenue en moyennant sur la position des billes. Elle est maximale au centre, c'est-à-dire dans la direction de rétrodiffusion. La courbe donne la dépendance angulaire de l'intensité. Elle présente le cône caractéristique de la rétrodiffusion cohérente (Photo courtoisement fournie par Georg Maret).

© 2004, **EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A
et
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 2-86883-712-3

ISBN CNRS ÉDITIONS 2-271-06263-2

Avant-propos

L'étude de la propagation des ondes dans les milieux désordonnés a donné lieu depuis plus de vingt ans à une somme énorme de travaux. Ceux-ci ont contribué à définir un vaste domaine aux contours de plus en plus flous qui recouvre à la fois les problèmes de localisation (faible ou forte), de physique mésoscopique, des effets de l'interaction entre électrons dans les métaux, etc. De plus, certains effets n'étant pas spécifiques à un type particulier d'ondes, des approches se sont développées indépendamment en physique de la matière condensée, en optique, en physique atomique et en acoustique.

Il existe dans la littérature de nombreuses monographies et articles de revue d'excellente qualité traitant en détail tel ou tel de ces différents aspects. Notre but, dans cet ouvrage, n'est pas de nous situer au même niveau que ces contributions mais plutôt de chercher, d'une part, un dénominateur commun à tous ces effets et, d'autre part, de permettre au lecteur non spécialiste d'avoir en main les outils nécessaires à l'étude des travaux effectués dans ce domaine.

Notre premier souci a donc été de présenter au moyen *d'un formalisme unique*, une description des phénomènes physiques importants, cette description étant indépendante du type d'onde considéré (électrons, ondes lumineuses, etc.). À cette fin, nous avons d'abord repris en détail dans le cadre du modèle dit « de désordre gaussien », le calcul des quantités moyennes à une particule : densité d'états, temps moyen de collision élastique pour les deux classes les plus importantes d'équation d'ondes, à savoir l'équation de Schrödinger et l'équation de Helmholtz scalaire. Nous avons, autant que possible, essayé de préciser l'idée, centrale dans ce domaine, de diffusion multiple sur des diffuseurs effectifs indépendants dont la section efficace peut être obtenue dans le cadre de la théorie de la diffusion à une particule.

Les propriétés physiques généralement mesurées dans les milieux diffusants dépendent pour la plupart de la probabilité quantique décrivant la propagation d'un paquet d'onde d'un point à un autre. Cette quantité est donc fondamentale et nous avons consacré tout le chapitre 4 à son étude détaillée. On voit apparaître en particulier, les contributions classique (diffuson) et cohérente (cooperon) à cette probabilité, qui sont à la base des différents phénomènes physiques observés comme les corrections de localisation faible à la conductance électronique, la magnétorésistance négative en champ magnétique, la rétrodiffusion cohérente des ondes lumineuses, mais

aussi les fluctuations universelles de conductance et de speckle ainsi que les effets mésoscopiques sur le magnétisme orbital.

Il apparaît donc que tous ces effets découlent d'un même principe qui s'exprime essentiellement à l'aide d'une seule quantité : la probabilité de diffusion quantique et son analogue optique. Par contre, en dépit de ce dénominateur commun aux phénomènes optiques et électroniques, chaque domaine a sa spécificité qui permet des approches et des méthodes d'investigation complémentaires. Ainsi, l'étude des systèmes électroniques permet, grâce à l'utilisation d'un champ magnétique ou d'un potentiel vecteur, de modifier continûment la phase relative des fonctions d'onde électroniques, ce qui n'a pas d'équivalent en optique. En revanche, en optique, il est possible de modifier l'angle des faisceaux incidents et émergents, et à partir de cette spectroscopie angulaire, de remonter aux corrélations entre les différents canaux d'injection.

Nous avons autant que possible souhaité garder à cet ouvrage un caractère de manuel accessible au plus grand nombre à partir d'un niveau DEA. Nous avons dû aussi choisir de mettre un certain nombre de problèmes de côté. Citons par exemple l'étude des « points quantiques », les relations entre transport électronique et propriétés spectrales, la localisation forte et la transition métal-isolant d'Anderson, les propriétés de cavités électroniques balistiques où la complexité ne résulte pas du désordre mais de la forme de la cavité qui confère aux électrons une dynamique chaotique, les interfaces entre métal normal et métal supraconducteur, etc. Ces différents aspects montrent la richesse de ce qu'il est convenu d'appeler maintenant la « physique quantique mésoscopique » à laquelle cet ouvrage constitue une première introduction.

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos remerciements à tous ceux qui, à divers titres, nous ont aidés dans la réalisation de cet ouvrage, par des discussions, des critiques ou des encouragements : O. Assaf, H. Bouchiat, J. Cayssol, C. Cohen-Tannoudji, N. Dupuis, D. Estève, A. Georges, S. Guéron, B. Huard, M. Kouchnir, R. Maynard, F. Piéchon, H. Pothier, B. Reulet, B. Shapiro, D. Ullmo, B. van Tiggelen, J. Vidal, E. Wolf. Nous souhaitons exprimer tout particulièrement notre reconnaissance à C. Texier pour ses innombrables commentaires, réflexions, suggestions, corrections qui ont considérablement amélioré la qualité de cet ouvrage. Merci aussi à G. Bazalitsky qui a réalisé la plupart des figures avec beaucoup de dévouement et à Y. Dufour pour l'impression des multiples versions préliminaires. Les moments de doute ne nous ont pas été épargnés au cours de ces cinq dernières années et le soutien d'Anne-Marie et de Tirza nous a alors été très précieux.

*Éric Akkermans, Gilles Montambaux,
juillet 2004.*

Avertissements

- Dans l'essentiel de cet ouvrage on utilise le système d'unités internationales (MKSA), sauf dans le chapitre 13. La constante de Planck \hbar est prise généralement égale à 1 en particulier dans tout le chapitre 4. Dans les chapitres où nous pensons qu'il est important de la rétablir, nous l'avons indiqué en tête de chapitre. Afin d'alléger les notations, elle n'est parfois rétablie que de façon incomplète dans une même formule, en particulier lorsque la correspondance entre échelles de fréquence et d'énergie est évidente.

- Nous avons souvent été confrontés au problème des notations, qu'il n'est pas toujours évident de garder cohérentes dans un livre qui contient plusieurs domaines habituellement traités séparément.

- Nous avons choisi de ne pas faire une bibliographie exhaustive, mais de citer des articles, soit pour leur intérêt pédagogique, soit parce qu'ils présentent un aspect particulier développé dans cet ouvrage (par exemple une question traitée en exercice).

Table des matières

Avant-propos	iii
1 Introduction : physique mésoscopique	1
1.1 Interférence et désordre	1
1.2 L'effet Aharonov-Bohm	5
1.3 Cohérence de phase et effet du désordre	8
1.4 Cohérence moyenne et diffusion multiple	10
1.5 Cohérence de phase et auto-moyennage : fluctuations universelles	14
1.6 Corrélations spectrales	15
1.7 Probabilité classique et croisements quantiques	17
1.7.1 Croisements quantiques	19
1.8 Les objectifs	21
2 Équations d'onde dans les milieux aléatoires	35
2.1 Équations d'ondes	35
2.1.1 Électrons dans un métal désordonné	35
2.1.2 Équation des ondes électromagnétiques – Équation de Helmholtz	36
2.1.3 D'autres équations d'ondes	38
2.2 Modèles de désordre	41
2.2.1 Le modèle gaussien	42
2.2.2 Impuretés localisées : le modèle d'Edwards	44
2.2.3 Le modèle d'Anderson	46
<i>Compléments du chapitre 2</i>	
C2.1 Théorie des collisions élastiques et diffusion simple	49
C2.1.1 Forme asymptotique des solutions	50
C2.1.2 Section efficace et flux diffusé	51
C2.1.3 Théorème optique	53
C2.1.4 Approximation de Born	56

C2.2	Théorème de réciprocité	61
C2.3	Diffusion de la lumière	64
C2.3.1	Diffusion Rayleigh classique	64
C2.3.2	Diffusion de Mie	67
C2.3.3	Diffusion atome-photon à l'approximation dipolaire	69
3	Théorie de perturbation	79
3.1	Fonctions de Green	81
3.1.1	Fonction de Green de l'équation de Schrödinger	81
3.1.2	Fonction de Green de l'équation de Helmholtz	87
3.2	Développement de diffusion multiple	89
3.2.1	Équation de Dyson	89
3.2.2	Self-énergie	91
3.3	Fonction de Green et densité d'états moyennes	96
	<i>Complément du chapitre 3</i>	
C3.1	Corrélations à courte portée	98
4	Probabilité de diffusion quantique	103
4.1	Définition	104
4.2	Propagation libre	107
4.3	Approximation de Drude-Boltzmann	107
4.4	Propagation classique : approximation du diffuson	108
4.5	Approximation de diffusion	114
4.6	Propagation cohérente : le cooperon	116
4.7	Transfert radiatif	122
	<i>Compléments du chapitre 4</i>	
C4.1	Diffuson et cooperon dans l'espace réciproque	126
C4.1.1	$P_0(\mathbf{q}, \omega)$	126
C4.1.2	Le diffuson	127
C4.1.3	Le cooperon	129
C4.2	Boîtes de Hikami et croisement de diffusons	133
C4.2.1	Les boîtes de Hikami	133
C4.2.2	Normalisation et coefficient de diffusion	138
C4.2.3	Croisement de deux diffusons	141
C4.3	Collisions anisotropes et libre parcours moyen de transport	146
C4.4	Corrélation des fonctions de Green diagonales	153
C4.5	Autres fonctions de corrélation	158
C4.5.1	Corrélations de fonctions de Green retardées	158
C4.5.2	Une identité de Ward	160
C4.5.3	Corrélations de fonctions d'ondes	161

5 Propriétés de l'équation de diffusion	163
5.1 Introduction	163
5.2 Quantités caractéristiques	164
5.2.1 Noyau de la chaleur - Probabilité de retour à l'origine	165
5.2.2 Temps de récurrence	166
5.3 Diffusion libre	168
5.4 Diffusion dans une boîte périodique	171
5.5 Diffusion dans les systèmes finis	172
5.5.1 Temps de diffusion et énergie de Thouless	172
5.5.2 Conditions aux limites pour l'équation de diffusion	172
5.5.3 Volume fini et « mode zéro »	173
5.5.4 Diffusion dans un domaine anisotrope	174
5.6 Diffusion unidimensionnelle	175
5.6.1 L'anneau - conditions aux limites périodiques	176
5.6.2 Bords absorbants : fil connecté	177
5.6.3 Bords réfléchissants : fil isolé	179
5.6.4 Fil semi-infini	181
5.7 La méthode des images	181
<i>Compléments du chapitre 5</i>	
C5.1 Validité de l'approximation de diffusion pour un milieu infini	183
C5.2 Équation de transfert radiatif	186
C5.2.1 Intensité totale	186
C5.2.2 Intensité diffusée	188
C5.2.3 Conditions aux limites	190
C5.2.4 Tranche éclairée par une source étendue	193
C5.2.5 Milieu semi-infini éclairé par un faisceau collimaté	194
C5.3 Diffusion multiple dans un milieu fini	196
C5.3.1 Diffusion multiple dans un demi-espace : le problème de Milne	196
C5.3.2 Diffusion dans un milieu fini	200
C5.4 Déterminant spectral	202
C5.5 Diffusion dans un domaine de forme quelconque - Développement de Weyl	205
C5.6 Diffusion sur des graphes	208
C5.6.1 Déterminant spectral sur un graphe	208
C5.6.2 Exemples	211
C5.6.3 Thermodynamique, transport et déterminant spectral	214
6 Déphasages	215
6.1 Déphasage et diffusion multiple	215
6.1.1 Généralités	215
6.1.2 Mécanismes de déphasage : introduction	216
6.1.3 Le mode de Goldstone	219
6.2 Champ magnétique et cooperon	220

6.3	Champ magnétique uniforme	224
6.4	Probabilité de retour à l'origine pour un flux Aharonov-Bohm	227
6.4.1	L'anneau	227
6.4.2	Le cylindre	229
6.5	Couplage spin-orbite et impuretés magnétiques	231
6.5.1	Potentiel d'interaction	232
6.5.2	Temps de collision	233
6.5.3	Facteur de structure	235
6.5.4	Le diffuson	240
6.5.5	Le cooperon	241
6.5.6	La probabilité de diffusion	243
6.5.7	Le cooperon X_c	245
6.5.8	Conclusion	246
6.6	Polarisation des ondes électromagnétiques	247
6.6.1	Libre parcours moyen	249
6.6.2	Facteur de structure	249
6.6.3	Intensité classique	252
6.6.4	Rétrodiffusion cohérente	254
6.7	Déphasage associé au mouvement des diffuseurs	254
6.7.1	Expression du déphasage	255
6.7.2	Déphasage associé à un mouvement brownien des diffuseurs	258
6.8	Déphasage ou décohérence?	260
<i>Compléments du chapitre 6</i>		
C6.1	Effet Aharonov-Bohm dans un plan infini	262
C6.2	Représentation fonctionnelle de l'équation de diffusion	265
C6.2.1	Représentation fonctionnelle	265
C6.2.2	Lois contraintes pour le mouvement brownien et champ magnétique	266
C6.3	Le cooperon dans un champ dépendant du temps	270
C6.4	Couplage spin-orbite et impuretés magnétiques : un point de vue heuristique	275
C6.4.1	Couplage spin-orbite	275
C6.4.2	Impuretés magnétiques	278
C6.5	Collisions photons-atomes froids	281
C6.5.1	Potentiel d'interaction	281
C6.5.2	Diffuson et cooperon	282
7	Transport électronique	289
7.1	Introduction	289
7.2	Contribution incohérente à la conductivité	292
7.2.1	L'approximation de Drude-Boltzmann	292
7.2.2	Le régime de collisions multiples : le diffuson	295
7.2.3	Temps de transport et renormalisation de vertex	297

7.3	Contribution du cooperon	298
7.4	Le régime de localisation faible	300
7.4.1	Rôle de la dimensionalité	301
7.4.2	Conducteurs de taille finie	304
7.4.3	Dépendance en température	305
7.5	Correction de localisation faible en champ magnétique	306
7.5.1	Magnétorésistance négative	306
7.5.2	Couplage spin-orbite et impuretés magnétiques	310
7.6	Magnétorésistance associée à un flux Aharonov-Bohm	312
7.6.1	Anneau	312
7.6.2	Long cylindre : l'effet Sharvin-Sharvin	314
7.6.3	Remarque sur les expériences de Webb et de Sharvin-Sharvin : ϕ_0 vs. $\phi_0/2$	315
7.6.4	L'effet Aharonov-Bohm dans un plan infini	316
 <i>Compléments du chapitre 7</i>		
C7.1	Formules de Kubo	318
C7.1.1	Conductivité et dissipation	318
C7.1.2	Fonction de réponse densité-densité	323
C7.2	Conductance et transmission	325
C7.2.1	Introduction - Formule de Landauer	325
C7.2.2	De Kubo à Landauer	328
C7.2.3	Transmission et conductance moyennes	330
C7.2.4	Conditions aux limites et adaptation d'impédance	333
C7.2.5	Correction de localisation faible dans le formalisme de Landauer	335
C7.2.6	Formalisme de Landauer pour les ondes	336
C7.3	Conductivité dans l'espace réel	338
C7.4	Correction de localisation faible et collisions anisotropes	340
8	Rétrodiffusion cohérente de la lumière	343
8.1	Introduction	343
8.2	La géométrie de l'albédo	344
8.2.1	Définition	344
8.2.2	Albédo d'un milieu diffusant	345
8.3	Valeur moyenne de l'albédo	347
8.3.1	Albédo incohérent : contribution du diffuson	347
8.3.2	Albédo cohérent : contribution du cooperon	350
8.4	Dépendance temporelle de l'albédo et analyse de la singularité triangulaire	354
8.5	Effet de l'absorption	356
8.6	Cas des collisions anisotropes	358
8.7	Rôle de la polarisation	360
8.7.1	Coefficients de dépolariation	360
8.7.2	Albédo cohérent d'une onde polarisée	362

8.8	Étude expérimentale	363
8.8.1	Singularité triangulaire	364
8.8.2	Réduction de la hauteur du cône	366
8.8.3	Effet de l'absorption	367
8.9	La rétrodiffusion cohérente dans d'autres situations	371
8.9.1	Rétrodiffusion cohérente et « gloire »	371
8.9.2	Rétrodiffusion cohérente et effet d'opposition en astrophysique	373
8.9.3	Rétrodiffusion cohérente par un gaz d'atomes froids	375
8.9.4	Rétrodiffusion cohérente en acoustique	377
9	Spectroscopie des ondes diffusées	379
9.1	Introduction	379
9.2	Corrélations dynamiques de l'intensité	381
9.3	Diffusion simple : QELS	383
9.4	Diffusion multiple : spectroscopie des ondes diffusées	383
9.5	Effet de la géométrie sur la fonction de corrélation dynamique	384
9.5.1	Réflexion par un milieu semi-infini	385
9.5.2	Comparaison de $G_1^r(T)$ et de $\alpha_c(\theta)$	386
9.5.3	Réflexion par une tranche de largeur finie	389
9.5.4	Transmission	391
	<i>Complément du chapitre 9</i>	
C9.1	Mouvement collectif des diffuseurs	393
10	Propriétés spectrales des métaux désordonnés	397
10.1	Introduction	397
10.1.1	Répulsion de niveaux et intégrabilité	398
10.1.2	Spectre d'un métal désordonné	401
10.2	Caractérisation des corrélations spectrales	402
10.3	Séquence poissonnienne	404
10.4	Théorie des matrices aléatoires	405
10.4.1	Répulsion de niveaux et matrices 2×2	405
10.4.2	Distribution des valeurs propres de matrices $N \times N$	408
10.4.3	Propriétés spectrales des matrices aléatoires	410
10.5	Corrélations spectrales en régime diffusif	414
10.5.1	Fonction de corrélation à deux points	415
10.5.2	La limite ergodique	419
10.5.3	La limite de diffusion libre	420
	<i>Complément du chapitre 10</i>	
C10.1	La transition GOE-GUE	423

11 Fluctuations universelles de conductance	425
11.1 Introduction	425
11.2 Fluctuations de conductivité	428
11.2.1 Fluctuations reliées à la densité d'états	431
11.2.2 Fluctuations reliées au coefficient de diffusion	434
11.3 Fluctuations universelles de conductance	435
11.4 Effet d'un paramètre extérieur	438
11.4.1 Dépendance en énergie	439
11.4.2 Dépendance en température	439
11.4.3 Cohérence de phase et régime mésoscopique	441
11.4.4 Dépendance en champ magnétique	444
11.4.5 Couplage spin-orbite et impuretés magnétiques	448

Compléments du chapitre 11

C11.1 Fluctuations universelles de conductance et collisions anisotropes	451
C11.2 Fluctuations de conductance dans le formalisme de Landauer	454

12 Corrélation des figures de speckle	457
12.1 Qu'est-ce qu'une figure de speckle?	457
12.2 Comment analyser une figure de speckle?	458
12.3 Coefficient de transmission moyen	463
12.4 Corrélations angulaires en transmission	465
12.4.1 Corrélation $C^{(1)}$ à courte portée	465
12.4.2 Corrélation $C^{(2)}$ à longue portée	469
12.4.3 Corrélation $C^{(3)}$ associée à deux croisements de diffusons	472
12.4.4 Lien avec les fluctuations universelles de conductance	475
12.5 Corrélation temporelle des figures de speckle	476
12.5.1 Corrélations temporelles $C^{(1)}(t)$ et $C^{(2)}(t)$	477
12.5.2 Corrélation temporelle $C^{(3)}(t)$	480
12.6 Corrélation spectrale des figures de speckle	482
12.7 Distribution des coefficients de transmission	484
12.7.1 Loi de Rayleigh	484
12.7.2 Distribution gaussienne du coefficient de transmission \mathcal{T}_a	485
12.7.3 Distribution gaussienne de la conductance	487

Compléments du chapitre 12

C12.1 Corrélation spatiale de l'intensité	489
C12.1.1 Corrélations à courte portée	490
C12.1.2 Corrélations à longue portée	492

13 Interactions et diffusion	497
13.1 Introduction	497
13.2 Potentiel de Coulomb écranté	498
13.3 Approximation de Hartree-Fock	501
13.4 Correction à la densité d'états	502
13.4.1 Interaction statique	502
13.4.2 Conductance tunnel et anomalie de densité d'états	507
13.4.3 Interaction dynamiquement écrantée	510
13.4.4 Effets capacitifs	514
13.5 Correction à la conductivité	516
13.6 Temps de vie d'un état électronique	519
13.6.1 Introduction : théorie de Landau et désordre	519
13.6.2 Temps de vie à température nulle	520
13.6.3 Temps de vie à température finie	527
13.6.4 Temps de vie d'une quasi-particule au niveau de Fermi	528
13.7 Cohérence de phase	531
13.7.1 Introduction	531
13.7.2 Cohérence de phase dans un champ électrique fluctuant	532
13.7.3 Temps de cohérence de phase en dimension $d = 1$	535
13.7.4 Cohérence de phase et relaxation des quasi-particules	539
13.7.5 Temps de cohérence de phase en dimensions $d = 2$ et $d = 3$	541
13.7.6 Mesures du temps de cohérence de phase τ_ϕ^{ee}	542
<i>Compléments du chapitre 13</i>	
C13.1 Potentiel coulombien écranté en géométrie confinée	545
C13.2 Temps de vie en l'absence de désordre	548
14 Magnétisme orbital et courants permanents	551
14.1 Introduction	551
14.2 Gaz d'électrons libres dans un champ uniforme	553
14.2.1 Rappel : le cas sans désordre	553
14.2.2 Aimantation moyenne	556
14.2.3 Fluctuations de l'aimantation	557
14.3 Effet des interactions	560
14.3.1 Approximation de Hartree-Fock	560
14.3.2 Renormalisation de Cooper	562
14.3.3 Température finie	563
14.4 Courant permanent dans un anneau	564
14.4.1 Anneau unidimensionnel sans désordre : périodicité et effet de parité	564
14.4.2 Courant moyen	569

14.5	Diffusion et courant permanent	571
14.5.1	Courant typique d'un anneau désordonné	572
14.5.2	Effet des interactions sur le courant moyen	575
14.5.3	Courant permanent et couplage spin-orbite	577
14.5.4	Bref panorama expérimental	579
 <i>Complément du chapitre 14</i>		
C14.1	Courant moyen dans l'ensemble canonique	581
15	Formulaire	583
15.1	Densité d'états et conductance	583
15.2	Transformées de Fourier - Définitions	584
15.3	Probabilité $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$	584
15.4	Divers	586
15.5	Formules de Poisson	592
15.6	Dépendances en température	593
Bibliographie		595
Index		619

Sujets développés. Les lignes représentent les liens logiques entre les chapitres.

