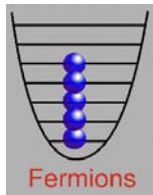
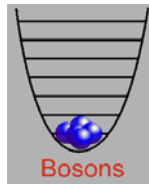


# Les gaz parfaits quantiques II

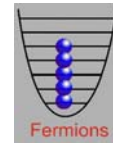


Gilles Montambaux

4 mai 2020

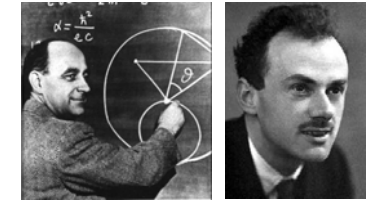


## « Statistiques quantiques »

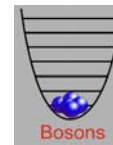


$$f_k^F = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

Fermi-Dirac

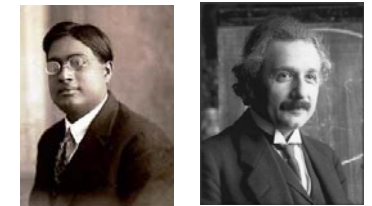


métaux, isolants, semi-conducteurs, naines blanches, étoiles à neutrons



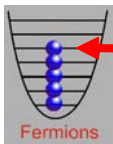
$$f_k^B = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

Bose-Einstein



rayonnement, effet de serre, lasers, rayonnement cosmologique, condensation de Bose, suprafluidité, supraconductivité

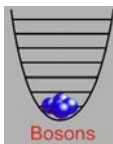
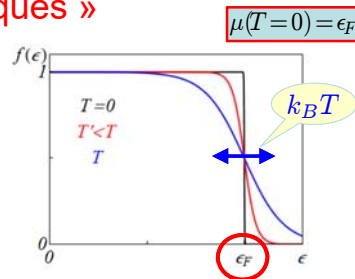
## « Statistiques quantiques »



$$f_k^F = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

Fermi-Dirac

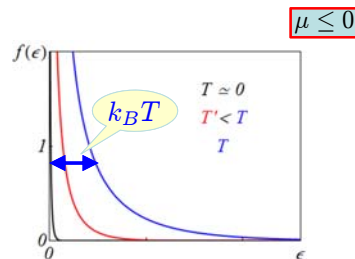
métaux, isolants, semi-conducteurs, naines blanches, étoiles à neutrons



$$f_k^B = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

Bose-Einstein

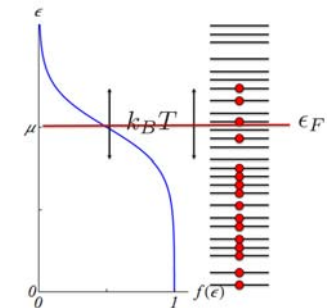
rayonnement, effet de serre, lasers, rayonnement cosmologique, condensation de Bose, suprafluidité, supraconductivité



## Résumé

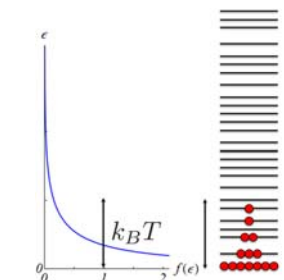
### Fermions :

Les propriétés physiques dépendent de la structure du spectre au voisinage du niveau de Fermi



### Bosons :

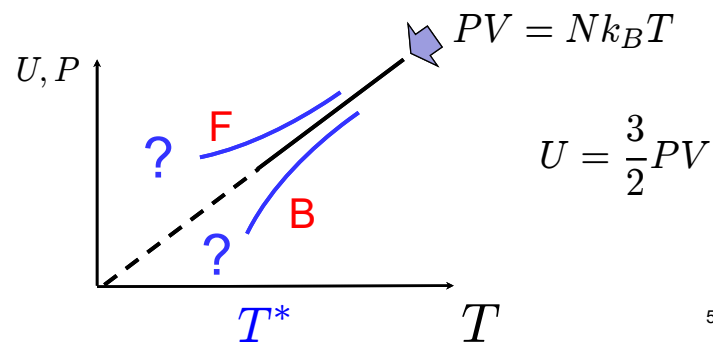
La physique est conditionnée par les états quantiques au voisinage du fondamental



## Équation d'état d'un gaz parfait de Fermions / de Bosons

Les Fermions ont tendance à s'éviter : principe d'exclusion de Pauli

Les Bosons ont tendance à se condenser dans le même état



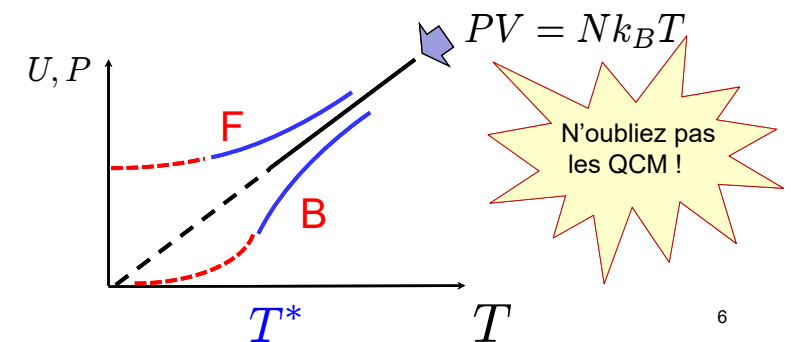
## Équation d'état d'un gaz parfait de Fermions / de Bosons

Les Fermions ont tendance à s'éviter : principe d'exclusion de Pauli

Les Bosons ont tendance à se condenser dans le même état

A  $T=0K$ , les Fermions ont une énergie cinétique finie

les Bosons sont tous dans l'état fondamental



## Température caractéristique $T^*$

Gaz quantique

$$k_B T^* \simeq \frac{\hbar^2}{m} \rho^{2/3}$$

Gaz classique

$$T \ll T^*$$

$$T \gg T^*$$

$$\lambda_T \gg a$$

$$\lambda_{T^*} \simeq a$$

$$\lambda_T \ll a$$

$$\rho \lambda_T^3 \gg 1$$

$$\rho \lambda_T^3 \ll 1$$

$$PV = ?$$

$$PV = Nk_B T$$

longueur thermique de de Broglie

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

$$\rho \lambda_{T^*}^3 \simeq 1$$

densité

$$\rho = \frac{1}{a^3}$$

Le postulat  
de symétrisation

- \* impose des conditions sur la nature des états quantiques
- \* conditionne la répartition des niveaux d'énergie
- \* et donc la thermodynamique

$$Z_c(\beta, N) = \sum_{\text{états}} e^{-\beta E}$$

Cette contrainte rend impossible le calcul de la fonction de partition canonique

$n_k$  nombre d'occupation de l'état  $k$

$$N = \sum_k n_k \quad \text{fixé}$$

Le postulat de symétrisation

- \* impose des conditions sur la nature des états quantiques
- \* conditionne la répartition des niveaux d'énergie
- \* et donc la thermodynamique

$$\alpha = \beta\mu = \frac{\mu}{kT}$$

$$\mathcal{Z}_g(\beta, \alpha) = \sum e^{-\beta E + \alpha N}$$

états,  $N$

Fermions  $\{n_k = 0, 1\}$

Bosons  $\{n_k \in \mathbb{N}\}$

$n_k$  nombre d'occupation de l'état  $k$

9

## Résumé : Statistiques quantiques

$$\alpha = \beta\mu = \frac{\mu}{kT}$$

$$\mathcal{A}_{F,B} = -kT \ln \mathcal{Z}_{F,B} = \mp kT \sum_k \ln(1 \pm e^{\alpha - \beta \epsilon_k})$$

↙ Fermions  
↘ Bosons

$$f_k^F = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1} \quad \text{Fermi-Dirac}$$

$$f_k^B = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \quad \text{Bose-Einstein}$$

$$N = \sum_k f_k$$

Grand potentiel  $\mathcal{A}_{F,B} = \pm kT \sum_k \ln(1 \mp f_k)$

Pression  $PV = -\mathcal{A}$

Energie interne  $U = \sum_k f_k \epsilon_k$

## Amphi 6

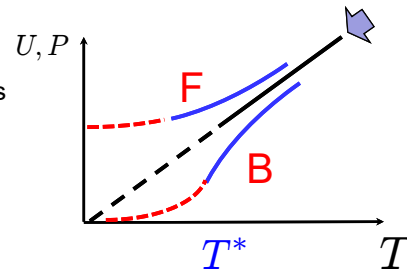
I. Généralités: grand potentiel (pression), énergie interne, facteur d'occupation, densité d'états, corrections par rapport au G.P. classique

### II. Fermions

Propriétés basse température  
 Deux exemples le gaz d'électrons  
 les naines blanches

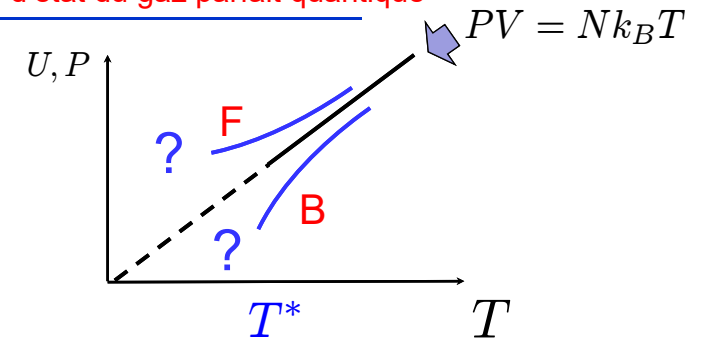
### III. Bosons

La condensation de Bose-Einstein  
 Trois exemples la suprafluidité  
 les atomes froids  
 la supraconductivité



11

## Équation d'état du gaz parfait quantique



$PV$  et  $U$  en fonction de  $N$ ,  $T$  ?

$$U = \sum_k f_k \epsilon_k \quad \text{où le potentiel chimique est déterminé par } N = \sum_k f_k$$

$$PV = \mp kT \sum_k \ln(1 \mp f_k)$$

Éliminer  $\alpha \rightarrow$  équations d'état

$$U = f(N, T) \quad PV = g(N, T)$$

## Comment calculer ces sommes ?

$$N = \sum_k f_k \quad \rightarrow \quad \mu(T)$$

$$U = \sum_k f_k \epsilon_k$$

$$PV = \mp k_B T \sum_k \ln(1 \mp f_k)$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Pour un gaz parfait, les états  $k$  sont les états  $\vec{k}$  de translation

13

## Comment calculer ces sommes ?

$$N = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}}$$

$$\sum_k \varphi(\epsilon_k) = \int D(\epsilon) \varphi(\epsilon) d\epsilon$$

$$U = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}}$$

$$PV = \mp k_B T \sum_{\vec{k}} \ln(1 \mp f_{\vec{k}})$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Pour un gaz parfait, les états  $k$  sont les états  $\vec{k}$  de translation

Dans un grand système, ces états  $\vec{k}$  forment un **continuum**

→ Remplacer ces sommes discrètes sur  $\vec{k}$  par des intégrales sur l'énergie

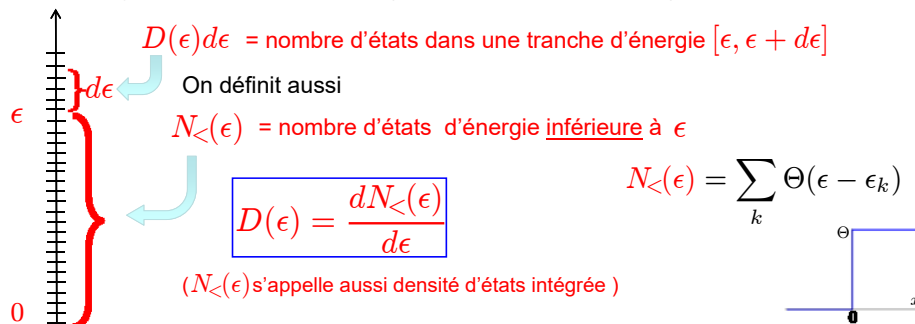
## Densité d'états

$$\sum_k \varphi(\epsilon_k) = \int D(\epsilon) \varphi(\epsilon) d\epsilon$$

La densité d'états  $D(\epsilon)$  compte le nombre d'états à une énergie donnée  $\epsilon$ .

$$D(\epsilon) = \sum_k \delta(\epsilon - \epsilon_k)$$

Il peut s'agir des états propres d'une particule quantique ou des modes électromagnétiques ou acoustiques (à une fréquence donnée  $\omega$ ) dans une boîte.



## Particule dans une boîte $N_{<}(\epsilon) = \sum_{\vec{k}} \Theta(\epsilon - \epsilon_{\vec{k}})$

Dans la limite du continuum,

$$N_{<}(\epsilon) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{\epsilon(\vec{k}) < \epsilon} d^3 \vec{k}$$

car dans une boîte de taille  $L$ , les états  $\vec{k}$  sont quantifiés et distants de  $\frac{2\pi}{L}$

$$N_{<}(\epsilon) = V \frac{\text{Volume de l'espace des } \vec{k} \mid \epsilon_{\vec{k}} < \epsilon}{(2\pi)^3}$$

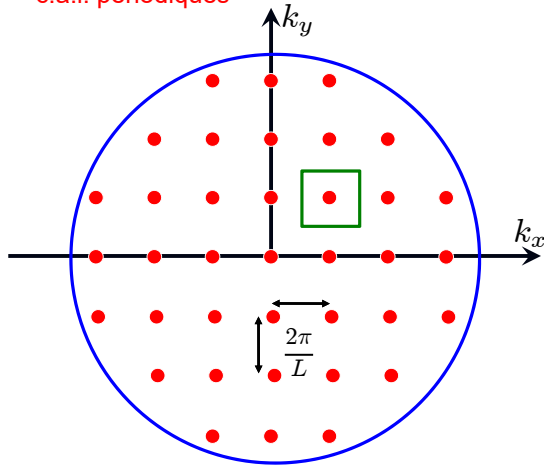
Si  $\epsilon(\vec{k}) = \epsilon(|\vec{k}|)$ , ce volume est isotrope, sphère de rayon  $k(\epsilon)$

$$N_{<}(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^3}{3}$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \text{remarque} \quad N_{<}(\epsilon) = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi p^3}{3}$$

# Densité d'états

c.a.l. périodiques



$$e^{ik_i x_i} = e^{ik_i (x_i + L)}$$



$$e^{ik_i L} = 1$$



$$k_i = n_i \frac{2\pi}{L} \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

$$N_{<}(\epsilon) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{\epsilon(\vec{k}) < \epsilon} d^3 \vec{k}$$

Le résultat ne dépend pas des c.a.l.

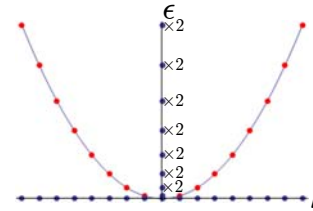


# Rappel : conditions aux limites

c.a.l. périodiques

$$e^{ikx} = e^{ik(x+L)} \Rightarrow e^{ikL} = 1$$

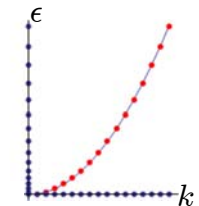
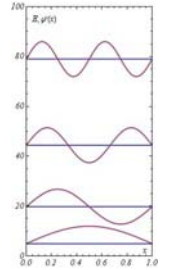
$$k = n \frac{2\pi}{L} \quad n \in \mathbb{Z}$$



c.a.l. bord dur

$$\sin kL = 0$$

$$k = n \frac{\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}^*$$



$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

La densité d'états ne dépend pas des conditions aux limites

Si  $\epsilon(\vec{k}) = \epsilon(k)$

$$N_{<}(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^3(\epsilon)}{3}$$

Pour des particules massives,  $\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$   
de spin **s**

$$N_{<}(\epsilon) = (2s + 1) \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

$$D(\epsilon) = (2s + 1) \frac{V}{4\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{\epsilon}$$

en dimension d=3

en dimension d

$$N_{<}(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^d} A_d k^d$$

$$N_{<}(\epsilon) \propto \epsilon^{d/2}$$

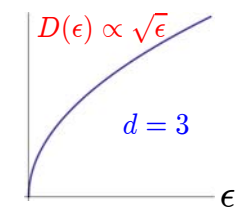
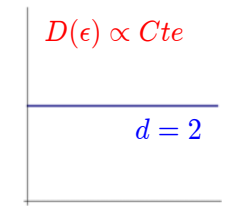
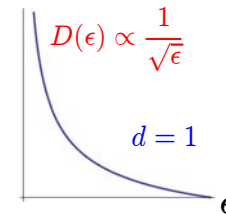
$$D(\epsilon) \propto \epsilon^{d/2-1}$$

en dimension d ...

pour un spectre quadratique

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad N_{<}(\epsilon) \propto \epsilon^{d/2}$$

$$D(\epsilon) \propto \epsilon^{d/2-1}$$



$$N_{<}(\epsilon) = \frac{V}{(2\pi)^d} A_d k^d$$



pour un spectre linéaire,

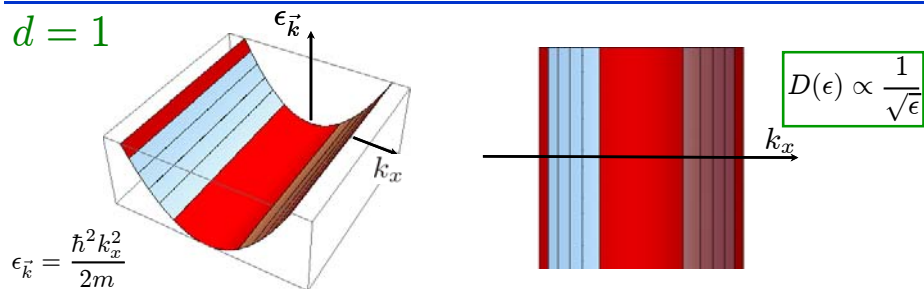
$$\epsilon(\vec{k}) = \hbar c k \quad N_{<}(\epsilon) \propto \epsilon^d$$

$$D(\epsilon) \propto \epsilon^{d-1}$$

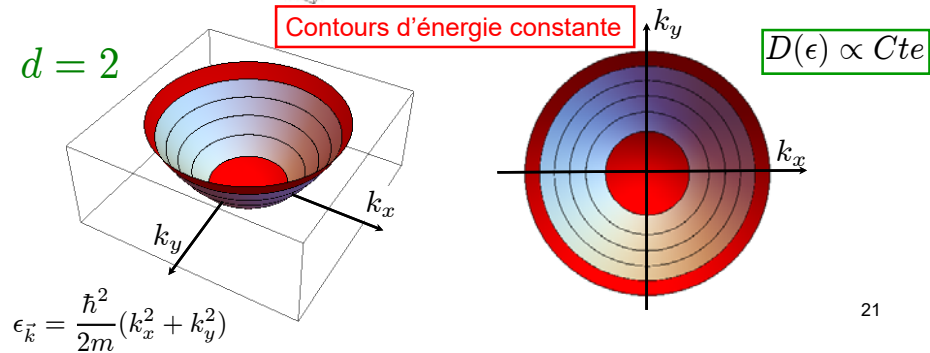
cf. ondes électromagnétiques, phonons, électrons dans le graphène !

$D(\epsilon)d\epsilon =$  nombre d'états dans une tranche d'énergie  $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$

$d = 1$



$d = 2$



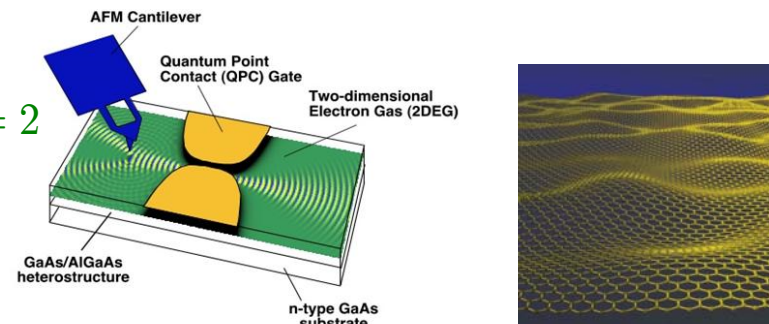
21

Nanotubes de carbone

$d = 1$



$d = 2$



« Gaz 2D » à l'interface de deux semiconducteurs

Graphène

22

Comment calculer ces sommes ?

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1}$$

$$N = \sum_k f_k \rightarrow \int D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

$$U = \sum_k f_k \epsilon_k \rightarrow \int \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

$$PV = \mp kT \sum_k \ln(1 \mp f_k) \rightarrow \mp kT \int D(\epsilon) d\epsilon \ln[1 \mp f(\epsilon)]$$

$$f'_\epsilon = -\beta f_\epsilon (1 \mp f_\epsilon)$$

Int. p. parties

$$PV = \int N_{<}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

→ Remplacer ces sommes discrètes par des intégrales

23

Comment calculer ces sommes ?

$$N = \int D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

$$U = \int \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

$$PV = \int N_{<}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

Pour un gaz de particules massives

$$N_{<}(\epsilon) \propto \epsilon^{d/2}$$

$$U = \frac{d}{2} PV$$

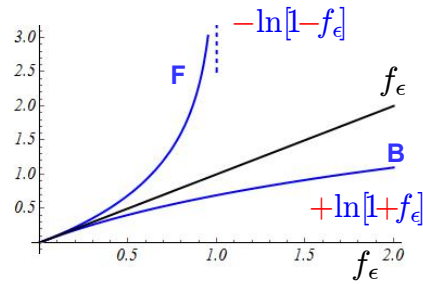
$\forall T$

24

## Équation d'état : relier PV à N et T

$$PV = \mp kT \int D(\epsilon) d\epsilon \ln[1 \mp f_\epsilon]$$

$$N = \int D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon$$



$$P_F > P_{class.} > P_B$$

## Équation d'état à haute température, première correction quantique

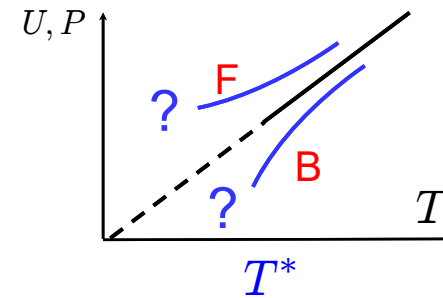
$$f_\epsilon = \frac{1}{e^{\beta\epsilon - \alpha} \pm 1} \xrightarrow{\text{hte temp.}} f_\epsilon = e^{\alpha - \beta\epsilon} \ll 1$$

$$PV \simeq NkT \left[ 1 \pm \frac{1}{2} \frac{\int D(\epsilon) f_\epsilon^2 d\epsilon}{\int D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon} \right] \quad \begin{matrix} \pm & \text{Fermions} \\ \mp & \text{Bosons} \end{matrix} \quad 25$$

## Équation d'état à haute température, première correction quantique

$$PV \simeq NkT \left[ 1 \pm \frac{1}{2} \frac{\int D(\epsilon) f_\epsilon^2 d\epsilon}{\int D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon} \right]$$

Limite haute température:  
 $f_\epsilon = e^{\alpha - \beta\epsilon} \ll 1$



$$D(\epsilon) \propto \sqrt{\epsilon}$$

$$PV \simeq NkT \left[ 1 \pm \left( \frac{T^*}{T} \right)^{3/2} \right]$$



pour  $T \gg T^*$  26

## Équation d'état à haute température, première correction quantique

Dans la limite haute température  $f_\epsilon = e^{\alpha - \beta\epsilon} \ll 1$

$$\frac{PV}{NkT} \simeq 1 \pm \frac{1}{2} \frac{\int D(\epsilon) f_\epsilon^2 d\epsilon}{\int D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon} = 1 \pm \frac{e^\alpha \int \epsilon^{d/2-1} e^{-2\beta\epsilon} d\epsilon}{2 \int \epsilon^{d/2-1} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}$$

$$PV \simeq NkT \left[ 1 \pm \frac{e^\alpha}{2^{d/2+1}} \right] \quad \text{avec} \quad e^\alpha = N/z_1 = \frac{\rho \lambda_T^3}{2s+1} \quad \begin{matrix} \text{G.P. classique (d=3)} \\ \text{(amphi 5, p. 61)} \end{matrix}$$

$$PV \simeq NkT \left[ 1 \pm \frac{\rho \lambda_T^3}{2^{5/2}(2s+1)} \right]$$

que l'on peut récrire sous la forme

$$PV \simeq NkT \left[ 1 \pm \left( \frac{T^*}{T} \right)^{3/2} \right]$$

Fonction de partition à une particule libre (s=0)  $z_1 = \frac{V}{\lambda_T^3} = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2}$

## Gaz parfait de Fermions

Quelques propriétés

Deux exemples :

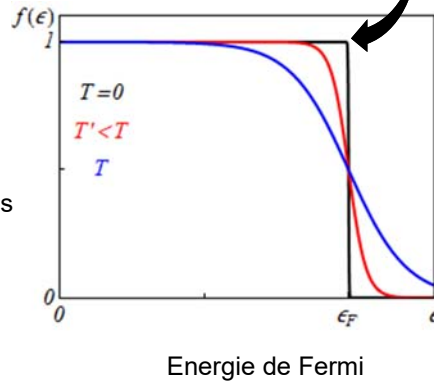
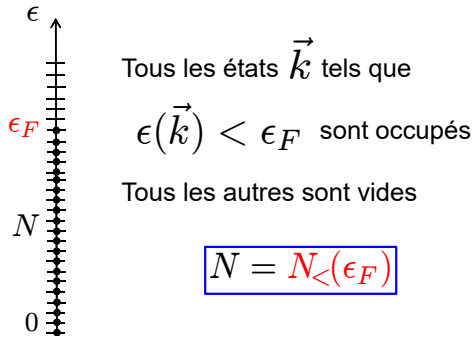
- I - Électrons libres dans les solides
- II - Naines blanches, étoiles à neutrons

## Fermions à température nulle

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Theta(\epsilon_F - \epsilon)$$

On définit l'énergie de Fermi

$$\epsilon_F \equiv \mu(T=0)$$



## Fermions à température nulle, définitions

Tous les états  $\vec{k}$  tels que  $\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < \epsilon_F$  sont occupés

Définit une sphère de rayon  $k_F = \sqrt{\frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2}}$

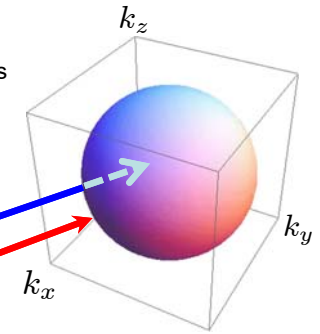
Tous les autres états sont vides

- Mer de Fermi = ensemble des états occupés

- Surface de Fermi = surface d'énergie  $\epsilon_F$

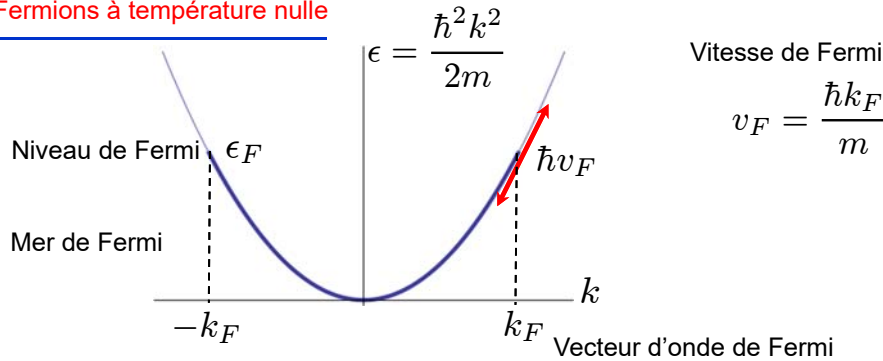
- Énergie de Fermi définie par  $N = N_{<}(\epsilon_F)$

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3 = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} \left( \frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (\text{spin } \frac{1}{2})$$



$$\frac{N}{V} = \frac{1}{a^3} \quad \text{Vecteur d'onde de Fermi} \quad k_F = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{a} \rightarrow \epsilon_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

## Fermions à température nulle



$k_B T_F \equiv \epsilon_F$  définit la température de Fermi

$$k_B T_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

cf. argument dimensionnel  
amphi 5, p.13

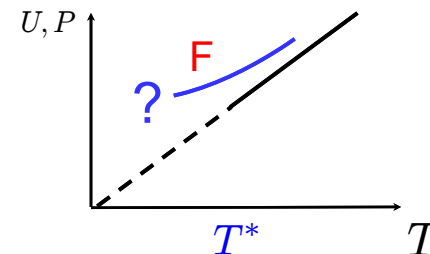
$$k_B T^* \simeq \frac{\hbar^2}{2ma^2} \simeq \frac{\hbar^2}{m} \rho^{2/3}$$

## Fermions à température nulle

$$N = \int_0^\infty D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \xrightarrow{T=0K} \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon \quad \sqrt{\epsilon} \quad (d=3)$$

$$U = \int_0^\infty \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \rightarrow \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon \quad \boxed{U = \frac{3}{5} N \epsilon_F}$$

$$PV = \int_0^\infty N_{<}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \rightarrow \int_0^{\epsilon_F} N_{<}(\epsilon) d\epsilon \quad \boxed{PV = \frac{2}{5} N \epsilon_F}$$





## Fermions massifs à température nulle

$$D(\epsilon) \propto \epsilon^{d/2-1}$$

$$N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon \propto \frac{2}{d} \epsilon_F^{d/2}$$

$$U = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon \propto \frac{2}{d+2} \epsilon_F^{d/2+1} \quad U = \frac{d}{d+2} N \epsilon_F$$

$$U = \frac{d}{2} PV \quad \text{est vrai à toute température car}$$

$$PV = \int N_{<}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad U = \int \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

$$N_{<}(\epsilon) = \frac{2}{d} \epsilon D(\epsilon)$$

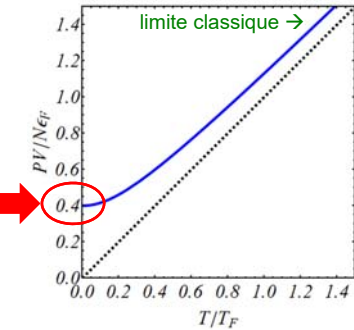
33

## Fermions à température nulle

$$N = \int_0^{\infty} D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \rightarrow \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon \quad (d=3) \quad U = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

$$U = \int_0^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \rightarrow \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon$$

$$PV = \int_0^{\infty} N_{<}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \rightarrow \int_0^{\epsilon_F} N_{<}(\epsilon) d\epsilon \quad PV = \frac{2}{5} N \epsilon_F$$



34

## Fermions à température finie

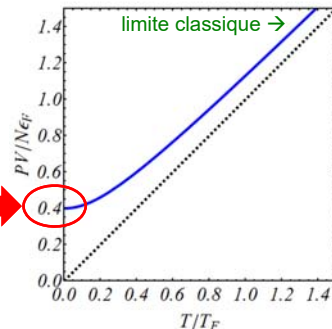
(d = 3)

$$N = \int_0^{\infty} D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

$$U = \int_0^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

$$U = \frac{3}{2} PV$$

« courbe universelle »



35

Pour caractériser un gaz de fermions, il faut d'abord évaluer sa température de Fermi

$$k_B T_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2 \rho^{2/3}}{2m}$$

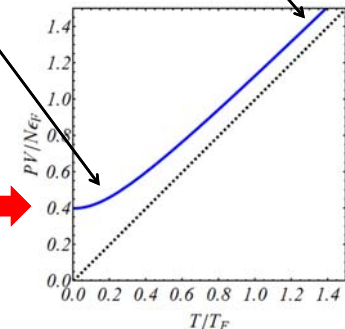
Si  $T \gg T_F$  gaz classique (non dégénéré)

Si  $T \ll T_F$  gaz « dégénéré »

$T_F$

gaz d'atomes ultrafroids < 1  $\mu$ K  
 $^3\text{He}$  liquide 1 K  
 él. dans les solides  $10^4$  K  
 él. dans les naines blanches  $10^9$  K

« Pression quantique »



36

## Exemple 1 : les électrons d'un métal (sodium)

$$k_B T_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e a^2}$$

$$a \sim 3.5 \text{ \AA} \quad \rho \sim 2.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$T_F \sim 36\,000 \text{ K} \sim 3 \text{ eV}$$

$$(e \text{ V} \leftrightarrow k_B T \quad 1 \text{ eV} \leftrightarrow 11600 \text{ K})$$

A température ambiante, les électrons d'un métal forment un gaz **fortement dégénéré**

$$T \ll T_F$$

Quid des propriétés électroniques à basse température ?

37

## Capacité thermique

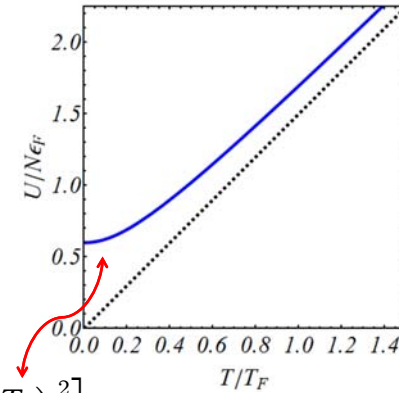
$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

Basse température

$$T \ll T_F$$

$$U = \frac{3}{5} N k_B T_F \left[ 1 + \alpha \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow C = \gamma T$$



Gaz parfait classique

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$C = \frac{3}{2} N k_B$$

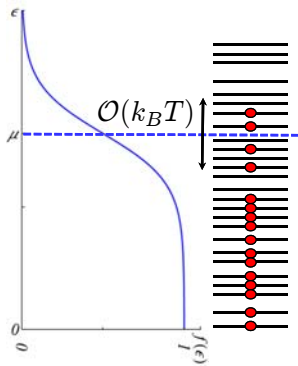
La capacité thermique linéaire en T est une propriété caractéristique d'un métal

## Capacité thermique

$$C = \gamma T$$

interprétation

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$



Variation de température  $\delta T$

$$\text{Classiquement : } \delta U \propto N k_B \delta T$$

Ici, à cause du principe de Pauli, à basse T, la proportion d'électrons pouvant être excités thermiquement est d'ordre  $T/T_F$

$$\delta U \propto N k_B \delta T \times \frac{T}{T_F}$$

$$C \propto N k_B \times \frac{T}{T_F}$$

résultat exact

$$\left( C = N k_B \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} \right)$$

La capacité thermique linéaire en T est une propriété caractéristique d'un métal

## Exemple 2 : les naines blanches

Stabilité : compétition entre pression gravitationnelle et pression de Fermi

$$\text{Gaz de noyaux + électrons} \quad T_{\odot} \sim 10^7 \text{ K}$$

$$k_B T_F \propto \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

$$T_F^{(\text{noyaux})} \sim 5 \cdot 10^4 \text{ K}$$

Le gaz de noyaux est classique

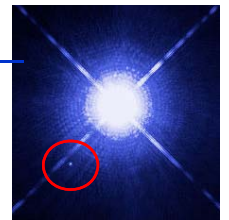
$$T_F^{(\text{electrons})} \sim 5 \cdot 10^9 \text{ K}$$

Le gaz d'électrons est dégénéré

$$P^{(\text{electrons})} V = \frac{2}{5} N_e k_B T_F^{(el)} \gg P^{(\text{noyaux})} V = N_n k_B T_{\odot}$$

C'est la **pression quantique des électrons** qui empêche son effondrement et assure sa stabilité

Bien que la température soit de 10 millions K, le gaz d'électrons peut être décrit comme un gaz à température nulle !!!



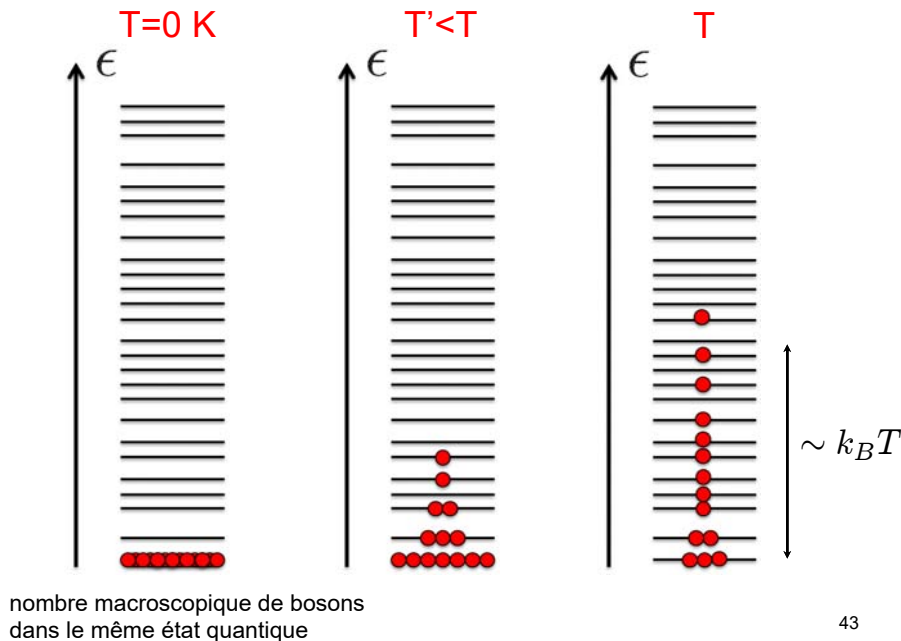
Sirius B

# Gaz parfait de bosons

## I - La condensation de Bose-Einstein

Quantentheorie des einatomigen idealen Gases.  
Zweite Abhandlung.  
VON A. EINSTEIN.

## II - Thermodynamique du rayonnement (amphi 8)



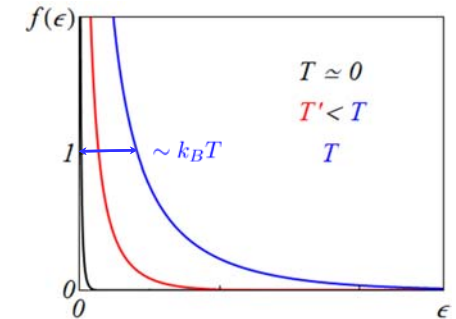
## Facteur d'occupation de Bose

$$\alpha = \beta\mu = \frac{\mu}{kT}$$

$$f_k^B = \langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

$$\mu(T) < \epsilon_k \quad \forall \epsilon_k$$

$$\mu(T) < 0 \quad \forall T$$



Le potentiel chimique est déterminé par la condition :

$$\sum_k f_k^B = N$$

## Équation d'état d'un gaz parfait de bosons (d=3)

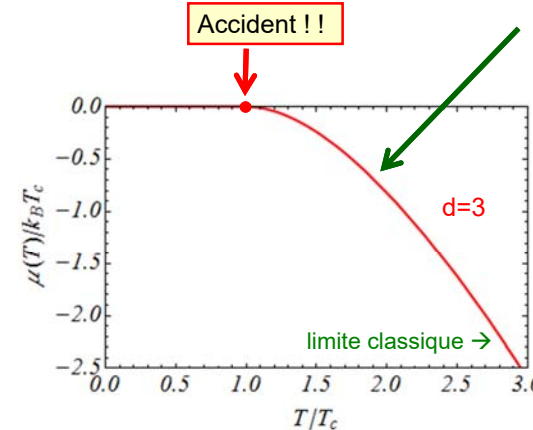
$$\alpha = \beta\mu = \frac{\mu}{kT}$$

$$U = \int \epsilon D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon$$

$$N = \int D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon$$

Le potentiel chimique est déterminé par ( $\mu(T) < 0$ )

$$N = \int D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon - \alpha} - 1} d\epsilon$$



Il s'annule pour une **température critique** donnée par

$$N = \int D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta_c \epsilon} - 1} d\epsilon$$

(L'intégrale converge si  $D(\epsilon) \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$  ce qui est le cas si d=3)

### Équation d'état d'un gaz parfait de bosons (d=3)

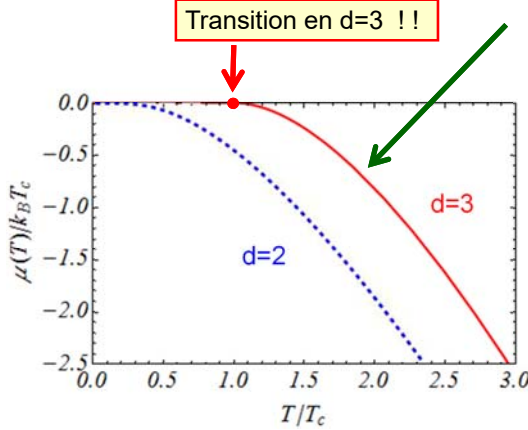
$$\alpha = \beta\mu = \frac{\mu}{kT}$$

$$U = \int \epsilon D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon$$

$$N = \int D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon$$

Le potentiel chimique est déterminé par ( $\mu(T) < 0$ )

$$N = \int D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon - \alpha} - 1} d\epsilon$$



45

### Équation d'état d'un gaz parfait de bosons (d=3)

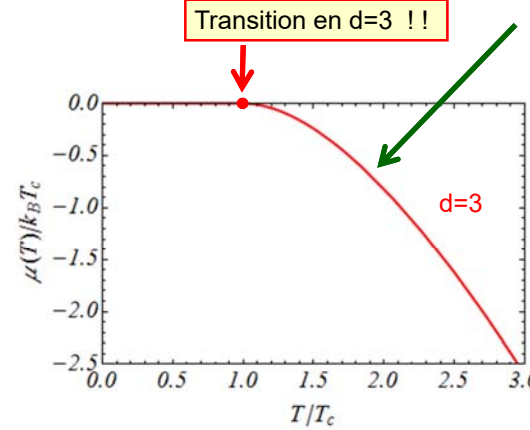
$$\alpha = \beta\mu = \frac{\mu}{kT}$$

$$U = \int \epsilon D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon$$

$$N = \int D(\epsilon) f_\epsilon d\epsilon$$

Le potentiel chimique est déterminé par ( $\mu(T) < 0$ )

$$N = \int D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon - \alpha} - 1} d\epsilon$$



Il s'annule pour une **température critique** donnée par

$$N = \int D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon$$

46

### Température critique de Bose-Einstein (d=3, s=0)

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

$$N = \int D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon$$

$$N = V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} \quad (\text{dimension : énergie}^{3/2})$$

$$N = V \frac{(2mkT_c)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} = V \frac{1}{\lambda_{T_c}^3} \zeta(3/2)$$

$$\rho \lambda_{T_c}^3 = \zeta(3/2) = 2.612\dots$$

$$\zeta(3/2) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$$

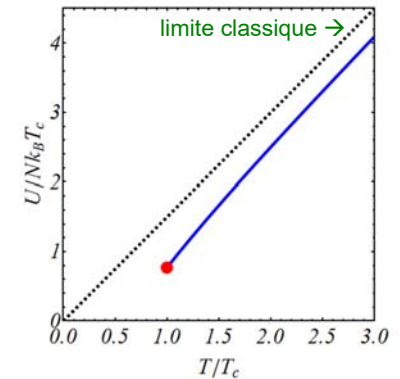
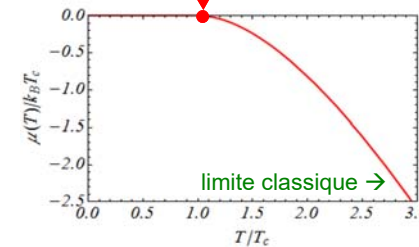
cf. argument dimensionnel

$$k_B T_c = 3.312 \frac{\hbar^2}{m} \rho^{2/3}$$

$$k_B T^* \simeq \frac{\hbar^2}{ma^2} \simeq \frac{\hbar^2}{m} \rho^{2/3}$$

### Équation d'état : $T > T_c$

Le potentiel chimique s'annule à  $T_c$



Potentiel chimique  $T > T_c$

$$N = \int D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon - \alpha} - 1} d\epsilon$$

Energie interne  $T > T_c$

$$U(T) = \int D(\epsilon) \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon - \alpha} - 1} d\epsilon$$

## Équation d'état : $T < T_c$

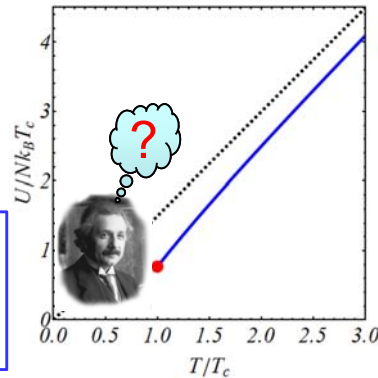
Le potentiel chimique s'annule à  $T_c$

Que se passe-t-il pour  $T < T_c$  ???

$$\mu(T) = 0$$

$$N = \int D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon + ???$$

constant      diminue



On a fait une erreur en remplaçant la somme par une intégrale

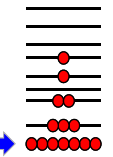
$$N = \sum_k f_k \rightarrow \int D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon + ???$$



C'est licite si les termes de cette somme discrète varient lentement avec  $k$   
Ce qui devient faux si  $\alpha \rightarrow 0$ , car occupation macroscopique du fondamental

Or, si  $T \simeq T_c$  et  $\alpha \simeq 0$  le facteur de Bose de l'état fondamental diverge

$$f_0 = \frac{1}{e^{-\alpha} - 1} \simeq -\frac{1}{\alpha} = N_0(T)$$



Le niveau  $k=0$  est peuplé **macroscopiquement**

$$N = \int D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon + N_0(T) = V \frac{1}{\lambda_T^3} \zeta(3/2) + N_0(T)$$

$$N = N \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} + N_0(T)$$

# d'atomes dans les états excités + # d'atomes dans l'état fondamental

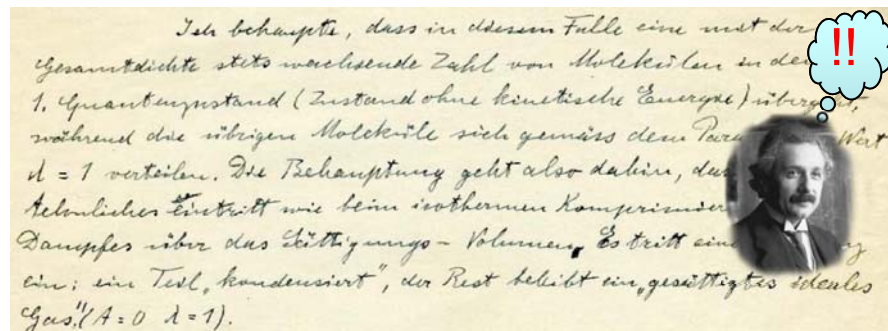
➔ Nombre macroscopique d'atomes condensés dans l'état fondamental

$$N_0(T) = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]$$

50

## Condensation de Bose-Einstein

A. Einstein 1924



J'affirme que dans ce cas, un nombre de molécules continûment croissant avec la densité s'installe dans le premier état quantique (celui qui possède une énergie cinétique nulle), tandis que les molécules restantes se répartissent conformément à la valeur 1 du paramètre  $\lambda (=e^{\beta\mu})$ ... une séparation se produit : une partie se condense, l'autre reste un « gaz parfait saturé ». A. Einstein 1924

$$n = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} V \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma^{-3/2}$$

$$\rho \lambda_{T_c}^3 = \zeta(3/2) = 2.612_{41}...$$

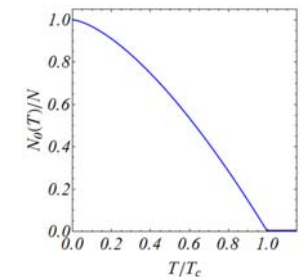
## Condensation de Bose-Einstein

A. Einstein 1924

« Condensation » d'un nombre macroscopique d'atomes dans l'état fondamental

$$N_0(T) = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]$$

Condensation dans l'espace des impulsions  $k=0$



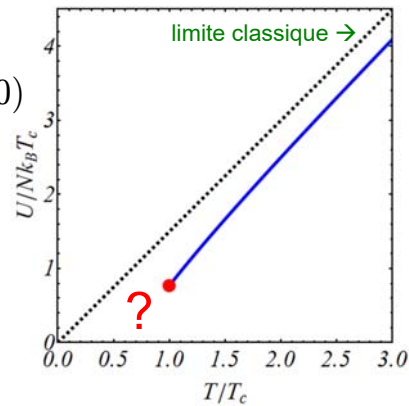
Une fraction macroscopique de particules est partout à la fois !

52

Équation d'état :  $T < T_c$

$$U = \int \epsilon D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (\alpha = 0)$$

$$U = V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon$$



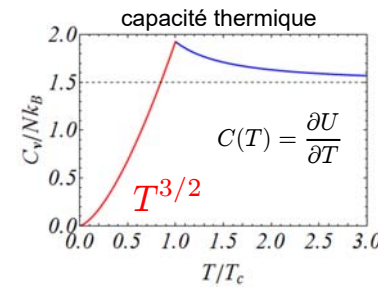
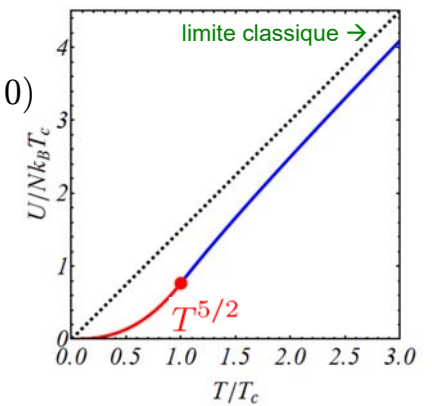
53

Équation d'état :  $T < T_c$

$$U = \int \epsilon D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (\alpha = 0)$$

$$U = V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon$$

$$\hookrightarrow U \propto T^{5/2}$$



(poly. § 7.3)

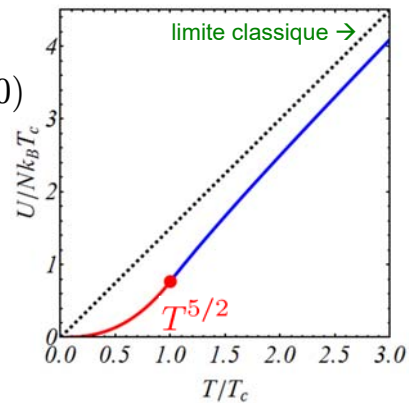
54

Équation d'état :  $T < T_c$

$$U = \int \epsilon D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (\alpha = 0)$$

$$U = V \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon$$

$$\hookrightarrow U \propto T^{5/2}$$



Qualitatif :

$$U \propto N k_B T \times \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

↓  
gaz parfait classique

↘  
proportion d'atomes non condensés

remarque : pour  $T < T_c$ ,  $U(T)$  est indépendant de  $N$  !

$$T_c \propto N^{2/3}$$

Condensation de Bose-Einstein

Einstein à Ehrenfest 1925

« A partir d'une certaine température, les molécules « se condensent » sans l'intervention de forces d'attraction, c'est-à-dire qu'elles s'agrègent en un état de vitesse nulle. C'est une belle théorie, mais contient-elle une part de vérité ? »

56

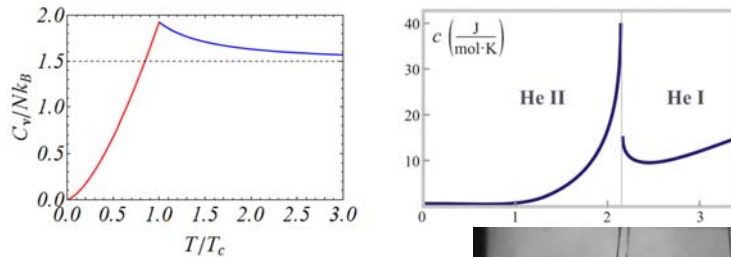
## Condensation de Bose-Einstein

Einstein à Ehrenfest 1925

"C'est une belle théorie, mais contient-elle une part de vérité ?"

Suprafluidité de  $^4\text{He}$  (1937)

2.17 K



Transition « lambda » de l'hélium vers une phase « superfluide »

mais interactions entre les atomes



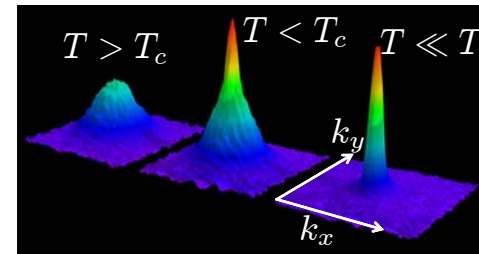
## Condensation de Bose-Einstein

Einstein à Ehrenfest 1925

"C'est une belle théorie, mais contient-elle une part de vérité ?"

Condensation de Bose dans un gaz d'atomes ultrafroids 1995

$^{87}_{37}\text{Rb}$  37 électrons + 37 protons + 50 neutrons **boson**



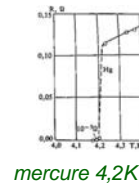
$T_c \simeq 100 \text{ nK}$

$^{23}_{11}\text{Na}$  11 électrons + 11 protons + 12 neutrons **boson**

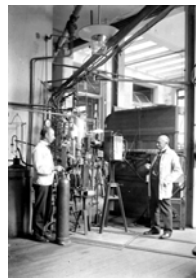
## Et la supraconductivité ?

Kamerlingh Onnes 1911

éléments ou alliages simples  $T_c \sim 1\text{K} - 20\text{K}$



mercure 4,2K



1986 Bednorz, Müller (oxydes) « Woodstock de la physique » !!!



$T_c \sim 135\text{K}$



N.Y., 18 mars 1987

Les électrons sont des **fermions** chargés qui se **repoussent** !!

Mais, via les vibrations du réseau (les phonons), ils s'apparient pour former des « **paires de Cooper** » qui sont des **bosons** et peuvent se **condenser** pour former un état « superfluide ».

BCS 1957 Bardeen, Cooper, Schrieffer

Encore de grandes questions : atteindre plus haute température, développement des applications, questions fondamentales encore non résolues

## Résumé : statistiques quantiques

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

Fermi-Dirac

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

Bose-Einstein

Nombre de particules  $N = \int D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \rightarrow \mu(T)$

Energie interne  $U = \int \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$

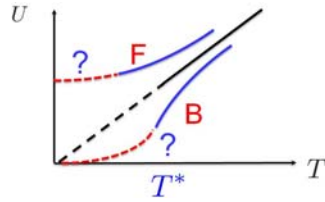
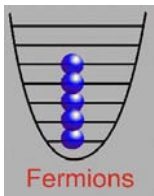
Pression  $PV = \int N_{<}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$

$$D(\epsilon) \propto \epsilon^{d/2-1}$$

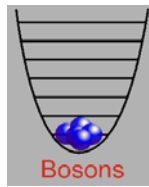
particules massives

$$D(\epsilon) \propto \epsilon^{d-1}$$

particules sans masse

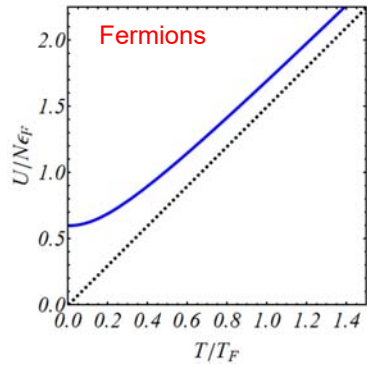


$$k_B T^* \simeq \frac{\hbar^2}{m} \rho^{2/3}$$



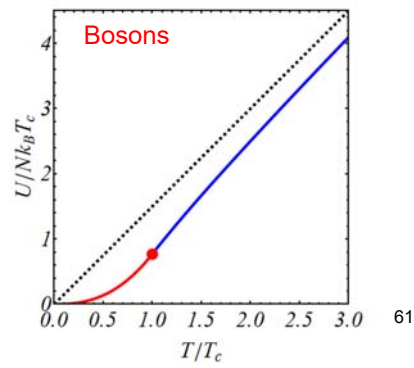
d=3  
s=1/2

$$k_B T_F = 4.78 \frac{\hbar^2}{m} \rho^{2/3}$$



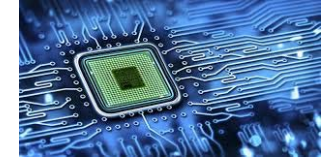
$$k_B T_c = 3.31 \frac{\hbar^2}{m} \rho^{2/3}$$

d=3  
s=0



61

## Prochains amphis



7 – Electrons dans les solides, métaux, isolants, semiconducteurs

8 - Thermodynamique du rayonnement, gaz de photons

