

---

Quelques expressions simples

---

**1. Relations de Drude et d'Einstein**

Montrer que, pour une relation de dispersion quadratique, les relations d'Einstein et de Drude pour la conductivité

$$\sigma_0 = e^2 D \rho(\epsilon_F) \quad \text{et} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2 \tau_e}{m} \quad (1)$$

sont équivalentes.

**2. Densité d'états**

Montrer que la densité d'états au niveau de Fermi en dimension  $d$  pour une relation de dispersion isotrope peut toujours s'écrire sous la forme

$$\rho(\epsilon_F) = 2d A_d \frac{1}{\hbar v_F \lambda_F^{d-1}} \quad (2)$$

où  $\lambda_F$  et  $v_F$  sont les longueur et vitesse de Fermi.

**3. Nombre de canaux**

Montrer que le nombre de canaux transverses d'un conducteur de volume  $V = LW^{d-1}$  s'écrit, en dimension  $d$

$$M_{d=2} = \text{Int} \left( \frac{k_F W}{\pi} \right) \quad , \quad M_{d=3} = \text{Int} \left( \frac{k_F^2 S}{4\pi} \right) \quad , \quad M = \text{Int} \left( \frac{A_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} (k_F W)^{d-1} \right) \quad (3)$$

où  $k_F$  est le vecteur d'onde de Fermi,  $W$  est la dimension transverse ( $S = W^2$ ) et  $A_d$  est le volume de la sphère unité en dimension  $d$  ( $A_1 = 2, A_2 = \pi, A_3 = 4\pi/3, A_d = \pi^{d/2}/\Gamma(1+d/2)$ ). Int désigne la partie entière.

**4. Conductance d'un système diffusif**

• À partir de la relation d'Einstein, montrer que la conductance dans un volume  $V = LW^{d-1}$  peut s'écrire sous la forme

$$G_{diff} = 2 \frac{e^2}{h} \frac{A_d}{(2\pi)^{d-1}} (k_F W)^{d-1} \frac{l_e}{L} \quad (4)$$

$L$  et  $W$  sont les dimensions longitudinale et transverses. Noter qu'elle peut aussi se mettre sous la forme

$$G_{diff} = 2 \frac{e^2}{h} M \frac{A_d}{A_{d-1}} \frac{l_e}{L} \quad (5)$$

• Montrer que la conductance sans dimension  $g = G_{diff}/(2e^2/h)$  peut s'écrire comme le rapport de deux énergies

$$g = 2\pi \frac{E_{th}}{\Delta} \quad (6)$$

où  $E_{th} = \hbar D/L^2$  est l'énergie de Thouless et  $\Delta$  est la distance entre niveaux, ou comme le rapport de deux volumes

$$g = dA_d \frac{V}{\lambda^{d-1} v_F \tau_D} \quad (7)$$

où  $\tau_D = L^2/D$  est le temps de Thouless. Interpréter le volume au dénominateur.

---

### Résistance de Sharvin

---

On considère l'écoulement des particules d'un gaz parfait à travers un orifice étroit de surface  $S$ . Un plan percé par cet orifice sépare deux récipients. Le libre parcours moyen  $l_e$  est supposé beaucoup plus grand que la largeur de l'orifice. On impose une différence de densité  $\Delta n$  entre les deux récipients. Il s'établit donc un courant de particules à travers l'orifice.

1 - Calculer le nombre de particules de vitesse  $\mathbf{v}$  traversant la surface  $S$  sous l'angle d'incidence  $\theta$  pendant un intervalle de temps  $dt$ . En déduire que le courant de particules  $I_p$  s'écrit

$$I_p = S \Delta n \langle v_x \rangle_+ \quad (8)$$

où  $v_x$  est la projection de la vitesse perpendiculairement à la surface.  $\langle \dots \rangle_+$  désigne la moyenne angulaire sur les vitesses  $v_x$  positives.

2 - Le gaz de particules est un gaz d'électrons dégénérés. La différence de densité est maintenue par une différence de potentiel chimique  $\Delta\mu$ . Calculer le courant électrique  $I = -eI_p$  en fonction de  $\Delta\mu$ .

3 - On modélise ici la conduction à travers un contact ponctuel de surface  $S$ , séparant deux réservoirs maintenus à des potentiels  $V_A$  et  $V_B$ . Montrer que la conductance du dispositif s'écrit:

$$G_s = e^2 \rho(\epsilon_F) S \langle v_x \rangle_+ \quad (9)$$

où  $\rho(\epsilon_F)$  est la densité d'états au niveau de Fermi. Montrer que, à  $d$  dimensions, le produit  $\rho(\epsilon_F) S \langle v_x \rangle_+$  est proportionnel à  $k_F^{d-1}$  et calculer la conductance  $G_S$ , dite de conductance de Sharvin, à deux et à trois dimensions. On pourra considérer le cas le plus général à  $d$  dimensions. On montrera que

$$\langle v_x \rangle_+ = v_F \frac{A_{d-1}}{dA_d}$$

et que

$$G_S^{d=2} = 2 \frac{e^2}{h} \frac{k_F W}{\pi} \quad , \quad G_S^{d=3} = 2 \frac{e^2}{h} \frac{k_F^2 S}{4\pi} \quad (10)$$

---

### Localisation faible: effets de la géométrie et du champ magnétique

---

On résoud ici l'équation de diffusion pour le cooperon, dans quelques géométries simples, avec éventuellement un champ magnétique et une perte de cohérence de phase caractérisée par un temps  $\tau_\phi$ . On en déduit ensuite la correction de localisation faible dans la géométrie correspondante. On rappelle que la correction de localisation faible à la conductance moyenne, exprimée en unités de  $2e^2/h$ , s'écrit ( $\tau_D = L^2/D$ ) :

$$\Delta g = -2 \int_0^\infty P_{int}(t) \left( e^{-t/\tau_\phi} - e^{-t/\tau_e} \right) \frac{dt}{\tau_D} . \quad (11)$$

$L$  est la taille du système et  $D$  est le coefficient de diffusion.  $\tau_\phi$  est le temps de cohérence de phase et  $\tau_e$  est le temps de collision élastique.

### 1 - Équation de diffusion

L'équation de diffusion

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D\Delta \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t) \quad (12)$$

a pour solution

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \theta(t) \sum_n \psi_n(\mathbf{r})\psi_n^*(\mathbf{r}')e^{-E_n t}, \quad (13)$$

où les  $\{\psi_n, E_n\}$  sont solutions de l'équation

$$-D\Delta\psi = E\psi. \quad (14)$$

En déduire que la probabilité intégrée de retour à l'origine  $P(t) = \int P(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$  s'écrit:

$$P(t) = \theta(t) \sum_n e^{-E_n t}. \quad (15)$$

### 2 - Diffusion libre dans un grand volume $V = L^d$

Montrer que :

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{\theta(t)}{(4\pi Dt)^{d/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4Dt}} \quad (16)$$

et par conséquent

$$P(t) = \theta(t) \frac{V}{(4\pi Dt)^{d/2}} = \theta(t) \left( \frac{\tau_D}{4\pi t} \right)^{d/2} \quad (17)$$

où  $\tau_D = L^2/D$  est appelé temps de diffusion ou temps de Thouless. Préciser le domaine de temps pour lequel ce résultat est valide.

### 3 - Localisation faible à $d$ dimensions

Dans la limite  $L_\phi \ll L$  et pour un échantillon de taille  $L^d$ , rappeler la conductance de Drude et calculer la correction de localisation faible à  $d$  dimensions. À  $d = 1$ , on considère en fait le cas d'un fil quasi-unidimensionnel avec  $M$  canaux de conduction. Montrer que

$$\begin{aligned} \text{quasi-1d} & \quad g = \frac{4}{3} \frac{Ml_e}{L} & \quad \Delta g = -\frac{L_\phi}{L} \\ d = 2 & \quad g = \frac{1}{2} k_F l_e & \quad \Delta g = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{L_\phi}{l_e} \\ d = 3 & \quad g = \frac{k_F^2 L l_e}{3\pi} & \quad \Delta g = -\frac{1}{2\pi} \frac{L}{l_e} \end{aligned} \quad (18)$$

Commenter l'amplitude relative de la correction en fonction de la dimension  $d$ .

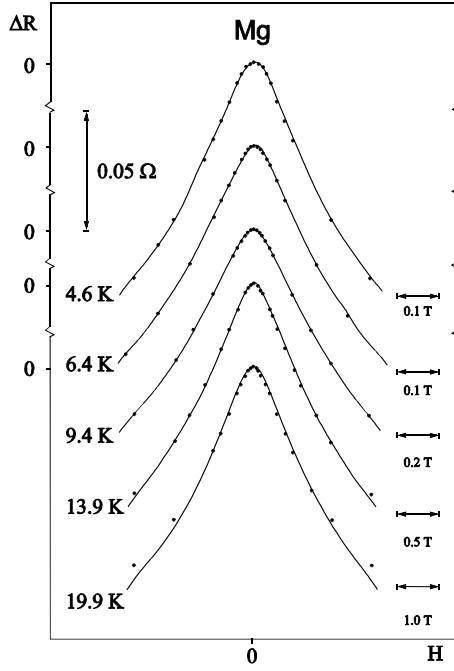


Figure 1: Magnétorésistance d'un film de magnésium pour différentes températures, en fonction du champ magnétique appliqué perpendiculairement au film. Les unités de champ sont différentes pour chaque température. Les points sont les résultats expérimentaux. Les courbes sont le résultat théorique (d'après G. Bergmann, Weak localization in thin films, *Phys. Rep.* **107**, 1 (1984).)

#### 4 - Localisation faible et magnétorésistance négative à deux dimensions

• Constatons que l'équation de diffusion pour le cooperon  $P_{int}$  en présence d'un champ magnétique  $B$  est analogue à l'équation de Schrödinger pour une particule libre. Utiliser cette analogie pour montrer le plus simplement possible que:

$$P_{int}(t, B) = \frac{BS/\phi_0}{\sinh(4\pi BDt/\phi_0)} \quad (19)$$

• En déduire la dépendance en champ magnétique de la correction de localisation faible à la conductance  $\Delta g(B)$ , ainsi que la magnétoconductance  $\delta g(B) = g(B) - g(0) = \Delta g(B) - \Delta g(0)$ . Montrer qu'elle s'écrit:

$$\delta g(B) = \frac{1}{2\pi} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\phi_0}{8\pi BL_\phi^2} \right) - \ln \frac{\phi_0}{8\pi BL_\phi^2} \right] \quad (20)$$

où  $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$  est la longueur de cohérence de phase.  $\psi(x)$  est la fonction Digamma.

• Établir et interpréter l'existence d'un champ magnétique caractéristique noté  $B_\phi$ . Discuter les limites de faible et fort champ. Commenter la figure (1).

• Montrer que, des mesures de la figure (1), on peut déduire la dépendance en température de la longueur de cohérence de phase  $L_\phi(T)$ .

#### 5 - Diffusion dans un système fini

Pour simplifier, on considère un problème unidimensionnel, celui de la diffusion dans un fil de longueur  $L$ . On s'intéresse à trois cas différents, le fil isolé, le fil connecté à des réservoirs et l'anneau. Pour chacun de ces cas, montrer comment s'expriment les conditions aux limites, calculer la probabilité  $P(x, x', t)$  et la probabilité de retour. Quelle est la différence importante entre les cas du fil isolé et du fil connecté? Commenter.

Pour la diffusion dans l'anneau, utiliser la formule de Poisson:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int f(y) e^{2i\pi m y} dy \quad (21)$$

pour montrer que

$$P(x, x', t) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(X+mL)^2/4Dt} . \quad (22)$$

où  $X = x - x'$ . Interpréter ce résultat en le comparant à (16).

### 6 - Localisation faible dans un fil quasi-1D

Montrer que pour le fil quasi-unidimensionnel connecté, avec  $L_\phi$  fini, la correction de localisation faible à la conductance moyenne, exprimée en unités de  $2e^2/h$ , s'écrit :

$$\Delta g = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 + (L/L_\phi)^2} \quad (23)$$

Cette somme est égale à

$$\Delta g = - \left( \frac{1}{x} \coth x - \frac{1}{x^2} \right) \quad (24)$$

avec  $x = L/L_\phi$ , et elle admet les comportements limites

$$\begin{aligned} \Delta g &\rightarrow -\frac{1}{3} && \text{si } L_\phi \gg L \\ \Delta g &\rightarrow -\frac{L_\phi}{L} && \text{si } L_\phi \ll L \end{aligned} \quad (25)$$

### 7 - Anneau dans un flux Aharonov-Bohm

• Montrer que le cooperon dans cette géométrie s'écrit :

$$P_{int}(t, \phi) = \frac{L}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 L^2/4Dt} \cos 4\pi m \phi / \phi_0 . \quad (26)$$

où  $\phi$  est le flux magnétique à travers l'anneau.

• En déduire la correction de localisation faible. Comment les harmoniques décroissent elles? Expliquer qualitativement pourquoi.

### 8 - Cylindre dans un flux Aharonov-Bohm

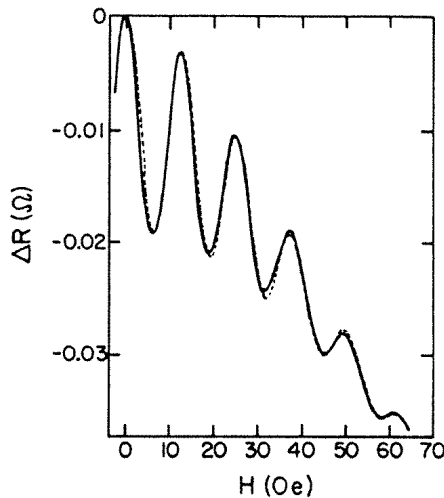


Figure 2: Magnétoconductance d'un film de magnésium évaporé sur un filament de quartz cylindrique. Le diamètre du film cylindrique est  $1,44\mu\text{m}$  (d'après B. Altshuler, A. Aronov, B. Spivak, D. Sharvin, Yu. Sharvin, Observation of the Aharonov-Bohm effect in hollow metal cylinders, *JETP lett.* **35**, 588 (1982)).

On mesure la conductance d'un cylindre de périmètre  $L$  et de hauteur  $L_z \gg L$ . Le cylindre est connecté à ses extrémités et il est traversé par un flux magnétique  $\phi$ .

- Montrer que le cooperon dans cette géométrie s'écrit :

$$P_{int}(t, \phi) = \frac{LL_z}{4\pi Dt} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 L^2 / 4Dt} \cos 4\pi m \phi / \phi_0 . \quad (27)$$

- En déduire la correction de localisation faible à la conductance. Montrer qu'elle s'écrit

$$\Delta g(\phi) = -\frac{L}{\pi L_z} \left[ \ln \frac{L_\phi}{l_e} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_0(mL/L_\phi) \cos(4\pi m \frac{\phi}{\phi_0}) \right] . \quad (28)$$

$L_\phi$  est la longueur de cohérence de phase et  $K_0(x)$  est une fonction de Bessel modifiée. Comment les harmoniques décroissent-elles? À quoi correspond la contribution  $m = 0$ ?

- Commenter la figure (2). Vérifier que les oscillations sont bien de période  $\phi_0/2$ . Pourquoi l'amplitude des oscillations diminue-t-elle lorsque le champ augmente?

### 9 - Magnétorésistance d'un fil quasi-1D

On considère un fil de section carrée de côté  $W$ , soumis à un champ magnétique  $B$  perpendiculaire à son axe  $Ox$ . Montrer que, en champ faible, la correction de localisation faible est toujours donnée par l'expression quasi-1D (24), moyennant la substitution

$$\frac{1}{L_\phi^2} \longrightarrow \frac{1}{L_\phi^2} + \frac{1}{L_B^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{L_B^2} = \frac{4e^2 B^2 W^2}{3\hbar^2} = \frac{W^2}{12\ell_B^2} \quad (29)$$

où  $\ell_B = \sqrt{\hbar/eB}$  est la longueur magnétique. Pour cela, on résoud l'équation de diffusion en traitant le champ magnétique en perturbation. Le fil étant quasi-1D, cette équation est unidimensionnelle (les modes transverses sont  $n_y = n_z = 0$ ). Les valeurs propres de l'équation de diffusion sont solutions de

$$-D \left( \partial_x + i \frac{2eA_x}{\hbar} \right)^2 \psi_{n_x} = E_{n_x} \psi_{n_x} \quad (30)$$

On choisit la jauge  $A_x = By$ . En perturbation, la fréquence des modes de diffusion devient

$$DQ_{n_x}^2 \longrightarrow DQ_{n_x}^2 + D \langle \psi_{n_x} | \frac{4e^2 B^2 y^2}{\hbar^2} | \psi_{n_x} \rangle \quad (31)$$

L'état propre  $\psi_{n_x}$  n'ayant pas de dépendance en  $y$  (mode transverse uniforme), le calcul de l'élément de matrice conduit à un déplacement identique pour toutes les valeurs propres, égal à  $4e^2 B^2 W^2 / 3\hbar^2$ . La correction de localisation faible garde donc la forme (24), moyennant la substitution (29). On remarque que le champ caractéristique décrivant la magnétorésistance du fil dans cette géométrie, correspond à un quantum de flux à travers une surface  $L_\phi W$ .

Finalement, la correction de localisation faible pour le fil sous champ perpendiculaire s'écrit :

$$\Delta g = -\frac{1}{L} \left( \frac{1}{L_\phi^2} + \frac{1}{L_B^2} \right)^{-1/2} . \quad (32)$$

### 10 - Fluctuations de conductance et croisement quantiques

Dessiner les différents diagrammes à deux croisements qui contribuent aux fluctuations de conductance.

### 11 - Pourquoi les fluctuations de conductance sont universelles et la localisation faible ne l'est pas?

Pour un échantillon de volume  $L^d$ , écrire la correction de localisation faible  $\Delta g$  et la variance  $\delta g^2$  sous la forme :

$$\begin{aligned}\Delta g &= -2 \int_0^{\tau_D} P(t) \frac{dt}{\tau_D} \\ \delta g^2 &= 12 \int_0^{\tau_D} P(t) \frac{t dt}{\tau_D^2}\end{aligned}\quad (33)$$

Dans la limite  $L \ll L_\phi$ , la coupure aux temps longs est assurée par le temps passé dans l'échantillon c'est-à-dire le temps de Thouless  $\tau_D$ . Puisque pour les temps inférieurs à  $\tau_D$ , la probabilité intégrée de retour à l'origine varie comme :

$$P(t) = \left( \frac{\tau_D}{4\pi t} \right)^{d/2} \quad (34)$$

Montrer que les fluctuations de conductance sont universelles pour  $d < 4$  et que la correction de localisation faible est universelle pour  $d < 2$ .

---

### Formulaire

---

On donne l'élément d'angle solide à  $d$  dimensions, et son intégrale angulaire

$$\begin{aligned}d\Omega_d &= (d-1)A_{d-1} \sin^{d-2} \theta d\theta \\ \Omega_d &= \int d\Omega_d = dA_d . \\ \frac{A_d}{A_{d-2}} &= \frac{2\pi}{d} \quad , \quad \int_0^\pi \sin^{d-2} \theta d\theta = \frac{dA_d}{(d-1)A_{d-1}}\end{aligned}$$

---


$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (35)$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-at} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad , \quad \int_0^\infty \frac{dt}{t} (e^{-at} - e^{-bt}) = \ln \frac{b}{a} \quad , \quad \int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} (e^{-at} - e^{-bt}) = 2\sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \quad (36)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-yx} - e^{-zx}}{\sinh(x/2)} dx = \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(y + \frac{1}{2}\right) \quad (37)$$

où  $\psi(x)$  est la fonction Digamma qui a les comportements asymptotiques

$$\Psi\left(\frac{1}{2} + x\right) \simeq \ln x + \frac{1}{24x^2} + \dots \quad , \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \quad (38)$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2} + x\right) \simeq \Psi(1/2) + x\Psi'(1/2) + \dots \quad , \quad \text{pour } x \rightarrow 0 \quad (39)$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 \quad (40)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\beta}{x} - \gamma x}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-2\sqrt{\beta\gamma}} \quad (41)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\beta}{x} - \gamma x}}{x} dx = 2K_0(2\sqrt{\beta\gamma}) \quad (42)$$

où la fonction de Bessel modifiée a les comportements asymptotiques

$$K_0(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad , \quad \text{si } x \rightarrow \infty \quad (43)$$

$$K_0(x) \sim -\gamma - \ln x/2 \quad , \quad \text{si } x \rightarrow 0 \quad (44)$$

Formule de Poisson : si  $f$  est une fonction paire:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n + \varphi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{2i\pi m y} dy \cos 2\pi m \varphi \quad (45)$$

Ecole "Physique Quantique Mésoscopique", Cargèse 3 - 14 Septembre 2012  
Cours : Transport quantique dans les conducteurs désordonnés, G. Montambaux  
Quelques références

---

- E. Akkermans and G. Montambaux,  
*Physique mésoscopique des électrons et des photons*,  
EDPSciences (2004)  
*Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*,  
Cambridge University Press (2007)
- Y. Imry,  
*Introduction to Mesoscopic Physics*,  
Oxford (2002)
- P. Lee and T. Ramakrishnan,  
*Disordered electronic systems*  
Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985)
- B.L. Altshuler, P.A. Lee and R.A. Webb eds., *Mesoscopic Phenomena in Solids*,  
(North-Holland 1991)
- B. Kramer and A. MacKinnon,  
*Localization: theory and experiment*  
Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993)
- A. Aronov and Y. Sharvin,  
*Magnetic flux effects in disordered conductors*  
Rev. Mod. Phys. **59**, 755 (1987)
- B.L. Altshuler and B. Simons,  
*Universalities: from Anderson localization to quantum chaos*  
in *Mesoscopic Quantum Physics, Proceedings of the Les Houches Summer School, Session LXI*, ed. by E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard and J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1995)
- G. Bergmann,  
*Weak-localization in thin films*,  
Phys. Rep. **107**, 1 (1984)
- S. Chakravarty and A. Schmid,  
*Weak localization: the quasiclassical theory of electrons in a random potential*,  
Phys. Rep. **140**, 193 (1986)
- P.A. Lee, D. Stone and H. Fukuyama,  
*Universal conductance fluctuations in metals*,  
Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987)
- C. Beenakker,  
*Random matrix theory of quantum transport*  
Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997)
- E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello and T.V. Ramakrishnan,  
*Scaling theory of localization: Absence of diffusion in two dimensions*  
Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- B. Altshuler and A. Aronov,  
*electron-electron interaction in disordered conductors*  
A. Efros and M. Pollak eds., Elsevier 1985
- B. Althuler, A. Aronov and D. Khmel'nitskii, *Effects of electron-electron collisions with small energy transfer on quantum localization*, J. Phys. C **15**, 7367 (1982)