PETITE ÉNIGME À SAINT-SULPICE

Gilles Montambaux

Connaissez-vous l'église Saint-Sulpice à Paris, dans le quartier de l'Odéon, entre le Jardin du Luxembourg et le Boulevard Saint-Germain ? L'auteur y a découvert une petite énigme gnomonique dont il partage avec vous la nature et la solution !

L'église Saint-Sulpice à Paris est bien connue pour les peintures de Delacroix dans une de ses chapelles, mais elle abrite aussi un instrument scientifique remarquable : un gnomon installé au XVIIIe siècle sous la direction de l'astronome Pierre Charles Le Monnier. Sa fonction était de mesurer l'éventuelle variation de l'obliquité de la Terre, c'est-à-dire l'angle entre le plan équatorial et l'écliptique. Un petit œilleton percé dans le vitrail du transept sud projette au sol l'image du Soleil. Le parcours de cette image au midi vrai tout au long de l'année est matérialisé par une ligne méridienne en laiton qui traverse la croisée du transept.

L'édifice n'étant pas assez large, l'image en hiver atteint le mur du transept nord. Par souci esthétique, les constructeurs y ont placé un obélisque sur lequel se terminent les rayons du solstice d'hiver. Cet obélisque intrigue souvent les visiteurs et a fait l'objet d'élucubrations dans un film célèbre (NDLR : *Da Vinci Code*). Ici on utilise le résultat de quelques observations pour en déduire l'obliquité de la Terre et vérifier la latitude de l'église.

Figure 1: l'église Saint-Sulpice. Le vitrail du transept sud. Les œilletons sont visibles à gauche.

Figure 2 : schéma du faisceau lumineux aux équinoxes.

Figure 3 : la méridienne et ses extrema. En hiver, elle se prolonge sur l'obélisque placé au transept nord. Deux œilletons sont encore visibles sur le vitrail du transept sud.

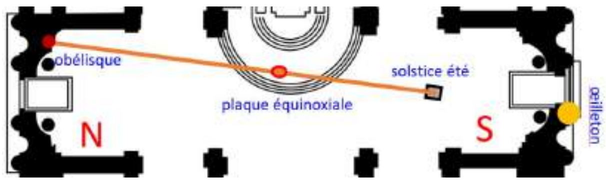

Figure 4 : parcours de la tache du Soleil, le long de la méridienne, et position aux équinoxes et aux solstices.

Les dimensions de l'église et la hauteur du gnomon sont indiquées sur la figure 5, ainsi que les positions de la tache du Soleil aux solstices et aux équinoxes.

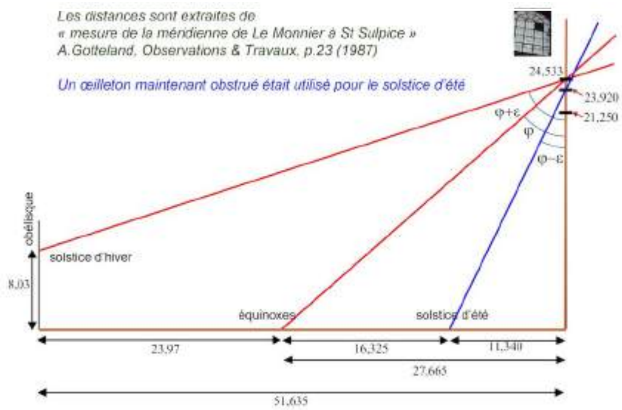

Figure 5 : dimensions. L'œilleton le plus bas n'est pas utilisé.

On propose ici d'en déduire la latitude du lieu et l'obliquité de l'axe terrestre. Commençons par les équinoxes. Les rayons du Soleil font avec la verticale un angle φ égal à la latitude du lieu. Ils définissent un triangle rectangle de base 27,665 m et de hauteur (la hauteur de l'œilleton) 24,533 m. On obtient donc :

$$\tan \varphi = 27{,}665 / 24{,}533 \text{ d'où } \varphi = 48°26'.$$

Ça commence mal ! La valeur obtenue est décevante ! C'est la latitude de la ville d'Étampes, 46 km plus au sud ! Comment une telle erreur est-elle possible ? On y revient plus loin…

Qu'en est-il des mesures aux solstices ? Au solstice d'été, le Soleil est au plus haut et les rayons font avec la verticale un angle $\varphi - \varepsilon$. Ils définissent un triangle rectangle (fig. 5) de base 11,340 m et de hauteur 23,920 m, d'où l'on déduit :

$\tan(\varphi - \varepsilon) = 11{,}340 / 23{,}920$ d'où $\varphi - \varepsilon = 25°\,22'$

Au solstice d'hiver, le Soleil est bas sur l'horizon, les rayons font un angle $\varphi + \varepsilon$ avec la verticale. Les rayons atteignent l'obélisque à une hauteur de 8,03 m, ce qui réduit d'autant la hauteur du triangle rectangle à considérer (fig.5). On obtient :

$$\tan(\varphi + \varepsilon) = 51{,}635 / (24{,}533 - 8{,}03)$$
$$\text{d'où } \varphi + \varepsilon = 72°\,16'$$

De ces deux mesures, on déduit d'une part l'obliquité $\varepsilon = 23°\,27'$, qui est très proche de la valeur réelle. On obtient d'autre part la latitude du lieu $\varphi = 48°\,49'$, valeur très proche de la valeur exacte $\varphi = 48°\,51'$.

Les solstices donnent une valeur correcte. Alors pourquoi une telle erreur aux équinoxes ? La réponse se trouve sur la photo ci-dessous.

Figure 6 : la balustrade du chœur, traversée par la méridienne. La plaque équinoxiale est une ellipse en laiton. Les deux arcs de cercles servent à l'ouverture de la balustrade.

La méridienne traverse le chœur. Or celui-ci est plus haut que le sol de l'église, surélevé de deux marches. Aux équinoxes, la tache se trouve dans le chœur. Elle est d'ailleurs matérialisée par une plaque en laiton, appelée « plaque équinoxiale ».

Ne pouvant retourner immédiatement à Saint-Sulpice pour mesurer la hauteur du chœur, je me suis contenté de chercher la valeur qui me permettrait d'obtenir la bonne latitude. Appelons x cette hauteur à déterminer. La hauteur du triangle équilatéral défini par les rayons du Soleil doit donc être 24,533 – x. Connaissant la latitude du lieu, nous avons donc : $\tan 48°\,51' = 27{,}665 / (24{,}533 - x)$, ce qui donne x = 36 cm dont on déduit que la hauteur d'une marche est 18 cm. Il ne restait plus qu'à revenir à Saint-Sulpice avec un mètre pour vérifier la prédiction correcte.

Figure 7 : hauteur des marches déduite de la latitude !

J'avais donc indirectement calculé la hauteur des marches du chœur de Saint-Sulpice à partir de la latitude du lieu !

Terminons ce petit travail avec l'observation de la plaque équinoxiale. Sachant que cette plaque est parfaitement couverte par la tache du Soleil au moment de l'équinoxe, peut-on déduire des dimensions de cette plaque, la latitude de l'église ?

Figure 8 : dimensions de la plaque équinoxiale

Les rayons du Soleil étant inclinés, la tache du Soleil au sol est une ellipse. Le rapport entre grand axe et petit axe est relié à cette inclinaison.

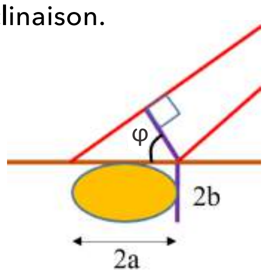

Figure 9 : le rapport entre les axes de l'ellipse dépend de l'inclinaison des rayons du Soleil, donc de la latitude.

D'après les figures 8 et 9 :

$$\cos\varphi = b / a = 35{,}7 / 53{,}8$$

Ce qui donne $\varphi \sim 48°\,26'$. Il ne s'agit évidemment là que d'une estimation grossière.

Gilles Montambaux gilles.montambaux@universite-paris-saclay.fr est directeur de recherche émérite au CNRS. Ses travaux, ses publications et bien d'autres contenus sont accessibles sur son site https://gilles.montambaux.com/.