* * *

Dualité Onde - Corpuscule

* * *

L'explication de l'effet photoélectrique par A. Einstein en 1905 mettait fin au dogme alors universellement accepté du caractère ondulatoire de la lumière établi par A.P. Young, A. Fresnel, J.C. Maxwell. Ce dogme était déjà ébranlé par l'explication par M. Planck du rayonnement du corps noir, grâce à la quantification des échanges d'énergie. Einstein allait plus loin en affirmant que la lumière elle-même se propage sous forme de quanta d'énergie $h\nu$ qu'on appellera plus tard les photons. Cette idée mit beaucoup de temps à être acceptée et en 1909, Einstein propose la dualité onde-corpuscule par l'analyse du rayonnement du corps noir. Il montre que les fluctuations du rayonnement du corps noir peuvent être scindées en deux contributions dont l'une montre le caractère *ondulatoire* du rayonnement et l'autre est la signature du caractère *corpusculaire*. C'est ce raisonnement qui est analysé dans ce problème.

1. On considère un gaz de photons à l'équilibre thermodynamique dans une enceinte de volume V à la température T. Ce gaz peut être décrit comme une superposition de modes propagatifs du champ électromagnétique, de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de fréquence $\nu_{\vec{k}}$. Quelle est la relation entre fréquence $\nu_{\vec{k}}$ et vecteur d'onde $\vec{k}$? (On ne confondra pas fréquence ν et pulsation $\omega = 2\pi\nu$). Quelle est la dégénérescence g associée à un vecteur d'onde $\vec{k}$ donné ? Quelle est son origine ?

2. En vous aidant au besoin du formulaire, rappeler l'expression de la fonction de partition grand-canonique Z_g pour ce gaz de photons. On exprimera $\ln \mathcal{Z}_g$ comme une somme discrète sur tous les modes de propagation $\vec{k}$ de fréquence $\nu_{\vec{k}}$. Rappeler pourquoi le potentiel chimique est nul.

3. Rappeler comment on obtient l'énergie interne $\langle E(T)\rangle$ du gaz de photons à partir de la fonction de partition.

4. Exprimer l'énergie interne par unité de volume $\langle E(T)\rangle/V$ comme une intégrale sur les fréquences, en faisant apparaître la densité de modes $D(\nu)/V$ par unité de fréquence et de volume, et l'énergie moyenne $\langle E_\nu(T)\rangle$ d'un gaz de photons de fréquence donnée ν.

5. Calculer la densité $D(\nu)/V$ de modes de fréquence ν. Retrouver l'expression de la loi de Planck pour la densité d'énergie moyenne à la fréquence ν, $u(\nu, T) = \frac{D(\nu)}{V}\langle E_\nu(T)\rangle$.

6. Écrire les expressions de la loi de Wien et de la loi de Rayleigh, limites de la loi de Planck dans les régimes respectifs de haute fréquence et de basse fréquence, que l'on définira. Rappeler comment on obtient la loi de Rayleigh avec le théorème d'équipartition de l'énergie.

7. Rappeler le spectre d'énergie d'un oscillateur harmonique de fréquence ν. Calculer la fonction de partition canonique Z_c d'un tel oscillateur. En déduire son énergie moyenne que l'on écrira sous la forme $\langle E_\nu(T)\rangle + \frac{h\nu}{2}$.

8. On associe chaque mode de propagation $\vec{k}$ du champ électromagnétique à un oscillateur de fréquence $\nu_{\vec{k}}$. Donner l'expression de l'énergie moyenne par unité de volume de cet ensemble d'oscillateurs. En mettant de côté l'énergie de point zéro qu'on ne considérera pas dans toute la suite du problème, montrer que l'expression est identique à celle obtenue à la question (3). Commenter.

9. À partir de la fonction de partition Z_c, calculer la fluctuation d'énergie ΔE_ν définie par $(\Delta E_\nu)^2 = \langle E_\nu^2 \rangle - \langle E_\nu \rangle^2$ associée à un mode de fréquence ν. Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$(\Delta E_\nu)^2 = h\nu \langle E_\nu \rangle + \langle E_\nu \rangle^2 \ . \tag{1}$$

10. Montrer que le premier terme est prépondérant à haute fréquence (Wien) alors que le second terme domine à basse fréquence (Rayleigh).

On va montrer que le premier terme est la signature du caractère corpusculaire de la lumière alors que le second est caractéristique de sa nature ondulatoire.

Nature corpusculaire

11. On considère un sous-volume V d'un grand corps noir de volume V_0 contenant N_0 photons de fréquence ν. Quel est le nombre moyen $\langle N \rangle$ de photons dans le volume V? On veut calculer la fluctuation de ce nombre de photons. Pour cela, on calcule d'abord la probabilité $w(N)$ de trouver N photons dans le volume V. Montrer que cette probabilité est donnée par une loi binomiale.

12. On considère la limite $N_0 \to \infty$, $V/V_0 \to 0$, en gardant constant le produit $\lambda = N_0 V/V_0$. Montrer que $w(N)$ tend vers la loi de Poisson. On rappelle la formule de Stirling, pour n grand: $n! \simeq n^n e^{-n}$.

$$w(N) = \frac{\lambda^N e^{-\lambda}}{N!} \ . \tag{2}$$

On donne : $N \ll N_0$, $\frac{N_0!}{(N_0-N)!} \to N_0^N$.

13. Vérifier que $w(N)$ est normalisée, calculer $\langle N \rangle$ et $\langle N^2 \rangle$. En déduire que

$$(\Delta E_\nu)^2 = h\nu \langle E_\nu \rangle, \tag{3}$$

ce qui est le premier terme de la relation (1).

Ce premier terme de la relation d'Einstein, dominant dans le régime de haute fréquence $h\nu \gg k_B T$ (Wien), peut donc être interprété comme une fluctuation poissonnienne d'un nombre de particules. Il est donc la signature du caractère corpusculaire de la lumière.

Nature ondulatoire

On considère, et c'était l'image qui prévalait à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, que dans une approche ondulatoire, l'amplitude et la phase du champ électromagnétique à la fréquence ν sont des variables aléatoires et résultent de la superposition chaotique d'un grand nombre de contributions indépendantes provenant des parois du corps noir, ou, ce qui revient au même, parties réelle et imaginaire de l'amplitude complexe $A = A_r + iA_i$ sont des variables aléatoires avec $E_\nu = A_r^2 + A_i^2$, en unités appropriées pour A_r et A_i et $\langle A_r \rangle = \langle A_i \rangle = 0$. Le théorème de la limite centrale implique que la distribution de ces amplitudes A_r et A_i sont distribuées de façon gaussienne

$$p(A_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-A_r^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad p(A_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-A_i^2}{2\sigma^2}} \ , \tag{4}$$

avec $\sigma^2 = \langle A_r^2 \rangle = \langle A_i^2 \rangle$.

14. Montrer que cette distribution gaussienne des amplitudes implique une loi exponentielle pour la distribution pour l'intensité lumineuse, c'est-à-dire de l'énergie E_ν. On montrera qu'on peut écrire cette distribution sous la forme :

$$p(E_\nu) = \frac{1}{\langle E_\nu \rangle} e^{-E_\nu / \langle E_\nu \rangle} \ . \tag{5}$$

15. Calculer $(\Delta E_\nu)^2$ et montrer que l'expression obtenue correspond au second terme de la relation (1).

    Ce second terme de la relation d'Einstein, dominant dans le régime de basse fréquence $h\nu \ll k_B T$ (Rayleigh) peut donc être interprété comme la signature du caractère ondulatoire de la lumière.

L'existence de ces deux termes dans l'expression des fluctuations de l'énergie du corps noir obtenue par Einstein est donc la manifestation de la dualité onde-corpuscule, la nature ondulatoire se révélant à haute fréquence et la nature corpusculaire à basse fréquence. Il est à noter que la loi de Wien a été obtenue expérimentalement bien avant (1896) la loi de Planck (1900), alors que la loi de Rayleigh-Jeans n'a été obtenue que quelques semaines avant la dérivation par Planck de la loi du corps noir (1900). La dualité onde-corpuscule introduite par Einstein fut un des concepts les plus difficilement acceptés et il fallut l'introduction de la dualité onde-corpuscule par L. de Broglie pour la matière puis l'équation de Schrödinger pour qu'elle le soit définitivement. Le mot "photon" pour désigner le "quantum de lumière" introduit par Einstein date de 1926.

* * *

Corrigé

* * *

1. La fréquence ν est reliée au vecteur d'onde $\vec{k}$ par la relation $\nu_{\vec{k}} = \frac{c}{2\pi}|\vec{k}|$. La dégénérescence associée à chaque valeur de $\vec{k}$ est $g = 2$, car il y a deux polarisations transverses possibles.

2. Il est rappelé dans le formulaire que pour des bosons, $\ln \mathcal{Z}_g = -\sum_k \ln(1 - e^{\alpha - \beta\epsilon_k})$, où k désigne de façon générique les états quantiques. Ici, ce sont les états propres $\vec{k}$ de l'impulsion et les deux polarisations transverses. On a ainsi

$$\ln Z_g(\beta) = -2 \sum_{\vec{k}} \ln(1 - e^{-\beta h \nu_{\vec{k}}}) \ . \tag{C.1}$$

Le potentiel chimique est nul car il n'y a pas de contrainte sur le nombre de photons.

3. On obtient l'énergie interne à l'aide de la fonction de partition:

$$\langle E(T) \rangle = -\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_g}{\partial \beta} \tag{C.2}$$

et à l'aide de (C.1), on obtient:

$$\langle E(T) \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} \frac{h\nu_{\vec{k}}}{e^{\beta h \nu_{\vec{k}}} - 1} \ . \tag{C.3}$$

4. Par définition de la densité de modes, $D(\nu) = 2\sum_{\vec{k}} \delta(\nu - \nu_{\vec{k}})$. On peut donc récrire (C.3) sous la forme

$$\langle E(T) \rangle = \int_0^\infty \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} D(\nu) d\nu \tag{C.4}$$

et en divisant par le volume, et en introduisant l'énergie moyenne d'un gaz de photons de fréquence ν:

$$\frac{\langle E(T) \rangle}{V} = \int_0^\infty \langle E_\nu(T) \rangle \frac{D(\nu)}{V} d\nu \qquad , \quad \text{avec} \quad \langle E_\nu(T) \rangle = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \ . \tag{C.5}$$

5. Calculons d'abord le nombre de modes de fréquence inférieure à une fréquence donnée ν

$$N_<(\nu) = 2\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}k(\nu)^3 \ . \tag{C.6}$$

Le facteur 2 correspond aux deux polarisations. En utilisant la relation $\nu = ck/(2\pi)$ entre fréquence et nombre d'onde, on obtient

$$N_<(\nu) = \frac{8\pi}{3} V \frac{\nu^3}{c^3} \ , \tag{C.7}$$

et en dérivant,

$$\frac{D(\nu)}{V} = 8\pi\frac{\nu^2}{c^3} \ . \tag{C.8}$$

À partir de (C.5) et (C.8), on obtient la loi de Planck

$$u(\nu,T) = \frac{D(\nu)}{V}\langle E_\nu\rangle = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1} \ . \tag{C.9}$$

6. Loi de Wien : $u(\nu,T) \to \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-\beta h\nu}$

   Loi de Rayleigh : $u(\nu,T) \to \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_B T$

   La loi de Rayleigh revient à donner une énergie moyenne $k_B T$ à chaque mode de propagation. C'est un résultat purement classique où la constante de Planck n'apparaît pas. Le préfacteur est la densité d'oscillateurs.

7. Les énergies propres de l'oscillateur harmonique sont données par $E_n = (n+1/2)h\nu$. La fonction de partition canonique Z_c est donné par la somme infinie

$$Z_c(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h\nu(n+1/2)} = \frac{e^{-\beta h\nu/2}}{1-e^{-\beta h\nu}} \ . \tag{C.10}$$

   On en déduit l'énergie moyenne:

$$\langle E_\nu\rangle = -\frac{\partial \ln Z_c}{\partial\beta} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1} + E_0 \tag{C.11}$$

   On ne considère pas l'énergie de point zéro $E_0 = h\nu/2$.

8. Pour une densité $D(\nu)/V$ d'oscillateurs, l'énergie moyenne par unité de volume est donc, en oubliant l'énergie de point zéro:

$$\frac{D(\nu)}{V}\frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1} \tag{C.12}$$

   qui est la même expression que celle de l'énergie moyenne par unité de volume d'un gaz de photons. Les deux points de vue consistent respectivement à considérer un gaz de particules identiques en nombre indéterminé (les photons) dont les énergies sont $h\nu_{\vec{k}}$, ou un ensemble d'oscillateurs de fréquences $\nu_{\vec{k}}$. Un photon est un degré d'excitation d'un oscillateur harmonique.

9. La variance des fluctuations d'énergie est donnée par

$$(\Delta E_\nu)^2 = \frac{\partial^2 \ln Z_c}{\partial\beta^2} = -\frac{\partial\langle E_\nu\rangle}{\partial\beta} = (h\nu)^2\frac{e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu}-1)^2}$$

   que l'on récrit en fonction de l'énergie moyenne

$$(\Delta E_\nu)^2 = (h\nu)^2\frac{e^{\beta h\nu}-1+1}{(e^{\beta h\nu}-1)^2} = h\nu\langle E_\nu\rangle + \langle E_\nu\rangle^2 \ . \tag{C.13}$$

10. Le rapport entre le second terme et le premier terme est précisément le facteur de Bose. Le premier terme est donc prépondérant pour $h\nu \gg k_B T$ et dans la limite opposée, c'est le second terme qui domine.

11. Le nombre moyen est donné par le rapport des volumes

$$\frac{\langle N \rangle}{N_0} = \frac{V}{V_0} \ . \tag{C.14}$$

On décrit les photons comme un gaz de particules indépendantes et identiques. La probabilité de trouver N photons dans le volume V est

$$w(N) = \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N} \ . \tag{C.15}$$

Le premier terme entre parenthèses est la probabilité que N particules soient dans le volume V, le second terme entre parenthèses est la probabilité que $N_0 - N$ particules ne soient pas dans le volume V et le premier terme est un facteur combinatoire.

12. Dans la limite $V/V_0 \to 0$, $N/N_0 \to 0$, on a les limites suivantes

$$\frac{N_0!}{(N_0 - N)!} \to N_0^N \qquad , \qquad \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N} \to e^{-N_0 \frac{V}{V_0}} \tag{C.16}$$

ce qui conduit à la distribution de Poisson:

$$w(N) = \frac{\lambda^N e^{-N}}{N!} \tag{C.17}$$

avec $\lambda = \langle N \rangle = N_0 V/V_0$.

13. La distribution est normalisée car

$$\sum_0^\infty w(N) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^\infty \frac{\lambda^N}{N!} = 1 \ . \tag{C.18}$$

La valeur moyenne de N est donnée par:

$$\langle N \rangle = e^{-\lambda} \sum_{N=1}^\infty \frac{N \lambda^N}{N!} = e^{-\lambda} \sum_{N=1}^\infty \frac{\lambda^N}{(N-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{n!} = \lambda = N_0 \frac{V}{V_0} \ . \tag{C.19}$$

La valeur moyenne de N^2 est donnée par

$$\langle N^2 \rangle = e^{-\lambda} \sum_{N=1}^\infty \frac{N^2 \lambda^N}{N!} = e^{-\lambda} \sum_1^\infty \frac{\lambda^N (N - 1 + 1)}{(N-1)!} = e^{-\lambda} \left[\sum_{N=2}^\infty \frac{\lambda^N}{(N-2)!} + \sum_{N=1}^\infty \frac{\lambda^N}{(N-1)!} \right] = \lambda^2 + \lambda \tag{C.20}$$

Ainsi la variance $(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ est donnée par

$$(\Delta N)^2 = \lambda = \langle N \rangle \ . \tag{C.21}$$

La variance est égale à la moyenne. En reprenant l'argument pour des photons de fréquence ν, et puisque $E_\nu = h\nu N_\nu$, on en déduit immédiatement que

$$(\Delta E_\nu)^2 = h\nu \langle E_\nu \rangle \tag{C.22}$$

On peut donc comprendre ce premier terme de la relation d'Einstein (C.13) comme une fluctuation poissonnienne d'un nombre de particules. Il est donc la signature du caractère corpusculaire de la lumière.

14. Passons en coordonnées polaires et notons $\rho^2 = A_r^2 + A_i^2$. On a ainsi:

$$p(\rho)d\rho = p(A_r)p(A_i)dA_r dA_i = p(A_r)p(A_i)2\pi\rho d\rho \ . \tag{C.23}$$

Donc

$$p(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \ . \tag{C.24}$$

Puisque $\rho^2 = E_\nu$, on a $\frac{d\rho}{dE_\nu} = \frac{1}{2\rho}$. Par ailleurs, $p(E_\nu)dE_\nu = p(\rho)d\rho$, dont on déduit

$$p(E_\nu) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-E_\nu/2\sigma^2} \ . \tag{C.25}$$

Finalement, puisque $\langle E_\nu \rangle = \langle A_r^2 \rangle + \langle A_i^2 \rangle = 2\sigma^2$, on obtient la relation proposée

$$p(E_\nu) = \frac{1}{\langle E_\nu \rangle} e^{-E_\nu/\langle E_\nu \rangle} \ . \tag{C.26}$$

15. Calculons d'abord $\langle E_\nu^2 \rangle$.

$$\langle E_\nu^2 \rangle = \frac{1}{\langle E_\nu \rangle} \int_0^\infty E_\nu^2 e^{-E_\nu/\langle E_\nu \rangle} dE_\nu = 2\langle E_\nu \rangle^2 \tag{C.27}$$

On en déduit que les fluctuations sont de l'ordre de la moyenne:

$$(\Delta E_\nu)^2 = \langle E_\nu^2 \rangle - \langle E_\nu \rangle^2 = \langle E_\nu \rangle^2 \tag{C.28}$$

ce qui correspond au second terme dans la relation d'Einstein (C.13). Ce second terme, dominant dans le régime de basse fréquence $h\nu \ll k_B T$ (Rayleigh), peut donc être interprété comme la signature du caractère ondulatoire de la lumière.

> *J'ai déjà tenté de montrer qu'il fallait renoncer aux fondements actuels de notre théorie du rayonnement... À mon avis, la prochaine phase de l'évolution de la physique théorique débouchera sur une théorie de la lumière que l'on pourra interpréter comme une espèce de synthèse entre la théorie ondulatoire et la théorie de l'émission... La structure ondulatoire et la structure en quanta ne doivent pas être considérées comme mutuellement incompatibles. A. Einstein (1909)*