Eine neue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie.

Von Dr. Willy Wien
in Charlottenburg.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz.)

Boltzmann[1] hat auf der Grundlage eines von Bartoli ersonnenen Processes nachgewiesen, dass aus dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie das Vorhandensein eines Druckes gefolgert werden kann, welcher von der Strahlung auf eine bestrahlte Oberfläche ausgeübt wird. Ein solcher Druck ist andererseits eine Folge der elektromagnetischen Theorie des Lichtes, und Boltzmann konnte aus dieser Beziehung das Stefan'sche Strahlungsgesetz für schwarze Körper ableiten.

Diese Schlüsse sind noch einer Vervollständigung fähig, wenn man sich nicht auf die Betrachtung der Gesammtstrahlung beschränkt, sondern die Strahlung nach ihren Wellenlängen zerlegt denkt.

Die gedachten Vorgänge, welche die Grundlage unserer Betrachtung bilden sollen, haben in derselben Weise, wie bei Boltzmann und früher bei Kirchhoff und Clausius, der Wirklichkeit so weit zu entsprechen, dass ihre thatsächliche Ausführung mit einem unbegrenzt erscheinenden Grade der Annäherung möglich sein muss.

Als Voraussetzungen werden wir nöthig haben zunächst die Gültigkeit der elektromagnetischen Lichttheorie, nach welcher der von einem Lichtstrahle in seiner Richtung ausgeübte Druck gleich der Energie des Strahles ist, dann die Möglichkeit der Existenz vollkommen schwarzer und vollkommen spiegelnder Körper, welche auch so zusammengesetzt sein können, dass sie die auffallenden Lichtstrahlen vollständig zerstreut zurückwerfen, wie wir es bei der totalen Reflexion weisser Körper annähernd erfüllt finden. Ausserdem betrachten wir noch den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie als gültig, dass auch durch Strahlung, welche von dem Wärmevorrath fester Körper herrührt, keine Arbeit aus Wärme ohne sonstige Arbeitsleistungen, Temperaturverluste oder Zustandsänderungen gewonnen werden kann.

[1] Wied. Ann. Bd. 32 S. 31 und 291. 1884.

Schliesslich setzen wir die Anwendbarkeit des Doppler'schen Princips auf Lichtstrahlen voraus.

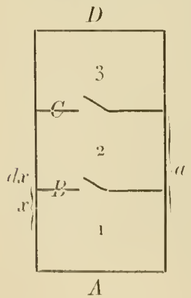
Die von einem schwarzen Körper herrührende in einem geschlossenen Raume mit spiegelnden Wänden befindliche Strahlung wird alle möglichen Richtungen haben. Man erhält dann nach Boltzmann den diesen Verhältnissen am besten entsprechenden Mittelwerth durch die Annahme, dass in einem Würfel parallel jeder Seitenwand gleichviel, also ein Drittel der Gesammtstrahlung, verläuft. Eine Volumverkleinerung vermehrt die Dichtigkeit der Energie (die Energiemenge in der Volumeinheit) durch Zurückführung des Energievorraths auf einen kleinern Raum und durch Arbeitsleistung gegen den Druck der Strahlen. Beim Zurückgehen gewinnt man die geleistete Arbeit vollständig wieder, wenn die Geschwindigkeit, mit der die Volumänderungen ausgeführt wurden, unendlich klein gegen die Lichtgeschwindigkeit bleibt, so dass die Änderung der Dichtigkeit immer über den ganzen Raum ausgeglichen ist.

Es lässt sich dann ein Vorgang denken, in welchem eine Vermehrung der Dichtigkeit der Energie einerseits durch Temperaturerhöhung, andererseits durch Volumverkleinerung erzielt werden kann. Der zweite Hauptsatz zeigt nun, dass bei gleicher Dichtigkeit der Gesammtenergie diese auch für jede einzelne Wellenlänge gleich sein muss. Die Wellenlängen der durch Volumverkleinerung verdichteten Strahlung sind nur dem Doppler'schen Princip entsprechend verändert. Diese Änderung lässt sich berechnen. Es ist also auch die durch Temperaturerhöhung bedingte Änderung bekannt.

§. 1.

Beschreibung der Vorgänge.

Wir denken uns einen Cylinder, in dem zwei Stempel B und C verschiebbar sind. Die Fläche des Querschnitts sei der Einheit gleich.



Die Stempel sollen mit Klappen versehen sein, welche lichtdicht verschlossen werden können. Die Zwischenräume 1, 2, 3 seien vollkommen leer. A und D sind schwarze Körper von verschiedener absoluter Temperatur ϑ_1 und $\vartheta_2 > \vartheta_1$. Sie sind von solchen Dimensionen, dass ihr Wärmevorrath unendlich gross gegen die in Form von Strahlung in die Zwischenräume 1, 2, 3 abgegebene Energie ist. Die Innenwände des Cylinders, die Stempel und Klappen sollen die Eigenschaft haben, die gesammte auffallende Strahlung vollständig zerstreut zurückzuwerfen, so dass unter diesen keine Vorzugsrichtung mehr vorhanden ist. Wenn man zugibt, dass vollkommene Spiegel denkbar sind, wird sich gegen die Möglichkeit nichts einwenden lassen, dass auch solche Körper, die man als vollkommen weiss zu bezeichnen hätte, mit beliebig weit getriebener Annäherung herstellbar sind. Wenn die beiden Klappen C und B geschlossen sind, so befindet sich die strahlende Energie des Raumes 2 in einem geschlossenen Raum mit isolirenden Wänden, sie bleibt also unverändert.

Es sei nun am Anfange unseres Processes die Klappe B geöffnet, C geschlossen. Es strahlt dann A in die Räume 1 und 2, D in den Raum 3. Die Dichtigkeit der Energie in 3 ist grösser als in 2, weil die Temperatur von D höher ist als die von A. Es werde jetzt B verschlossen. Nun bewegen wir den Stempel B gegen C hin und zwar mit einer Geschwindigkeit v, die unendlich klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c ist. Die Energie in 2 wird dann sowohl durch Volumverkleinerung als auch durch Arbeitsleistung gegen den Druck eine grössere Dichtigkeit erhalten. Wir bewegen B so weit, bis die Dichtigkeit in den beiden Räumen 2 und 3 gleich gross geworden ist. Man kann dann aus dem zweiten Hauptsatz schliessen, dass die Energievertheilung im Spectrum der Strahlen in beiden Räumen ebenfalls die gleiche ist.

Denn wenn diess nicht der Fall wäre, so müsste es Strahlen einer bestimmten Wellenlänge geben, welche in 3 eine grössere Energie besitzen als in 2. Wir können dann vor die Klappe von C eine dünne durchsichtige Lamelle legen, welche die Strahlen der betrachteten Wellenlänge vorzugsweise hindurchlässt, die anderen vorzugsweise reflectirt, und dann die Klappe öffnen. Es muss dann mehr Energie von 3 nach 2 gehen als umgekehrt und die Dichtigkeit der Energie wird in 2 grösser werden als in 3. Jetzt schliessen wir C, entfernen die Lamelle und lassen den Stempel C von dem in 2 herrschenden Überdrucke bewegt werden und Arbeit leisten bis die Dichtigkeit der Energie in beiden Räumen wieder die gleiche ist. Die hierbei gewonnene Arbeit sei Q. Dann wird C wieder geöffnet und in seine Anfangslage zurückgeführt. Diess kann ohne Arbeitsleistung geschehen, weil auf beiden Seiten jetzt der gleiche Druck herrscht. Ferner gehen wir bei geschlossenem C mit B auf die ursprüngliche Stelle zurück und gewinnen die beim Hingehen geleistete Arbeit wieder. Wenn endlich B wieder geöffnet wird, ist der Anfangszustand vollständig erreicht und dabei der Arbeitsbetrag Q aus Wärme gewonnen, ohne dass sonst irgend eine Zustandsänderung erfolgt wäre, die als Compensation dienen könnte. Da diess den zweiten Hauptsatz verletzt, so musste die spectrale Energievertheilung in Raum 2 und 3 dieselbe sein, als die Dichtigkeit in beiden die gleiche war. Kennen wir demnach die Energievertheilung in der von A herrührenden Strahlung und die Veränderung, die sie in Folge der Bewegung des Stempels B erlitten hat, so kennen wir auch die Vertheilung in der Strahlung des wärmern Körpers D.

§. 2.

Berechnung der Veränderung der Energievertheilung nach dem Doppler'schen Princip.

Es sei wieder v die Geschwindigkeit des Stempels, c die Lichtgeschwindigkeit. In Folge der Bewegung des Stempels B gegen die Strahlung werden die Wellenlängen nach dem Doppler'schen Princip verkürzt. Es wird die Schwingungsdauer T eines einmal senkrecht auffallenden Strahles, der zurückgeworfen wird, der Gleichung

$$T' = \frac{c - 2v}{c} T$$

entsprechend verändert. Da nun $T = \frac{\lambda}{c}$, $T' = \frac{\lambda'}{c}$ ist, wenn λ, λ' die Wellenlängen bezeichnen, so wird

$$\lambda' = \frac{c - 2v}{c} \lambda .$$

Bei den schräg auffallenden Strahlen kommt nur die normale Componente in Betracht. Bei gleichmässig vertheilter Richtung der Strahlung kann wieder in einem Würfel über dem Stempel B die Gesammtheit der normal verlaufenden Componenten gleich dem dritten Theile der Gesammtenergie gesetzt werden. Die von dem bewegten Stempel ausgehende Strahlung wird von den ruhenden Wänden zerstreut zurückgeworfen und auf diese Weise die gestörte Gleichmässigkeit der Vertheilung sofort wieder hergestellt.

Sei $\phi(\lambda)$ die ursprünglich in 2 vorhandene Dichtigkeit der Energie als Function der Wellenlänge, so dass $\phi d\lambda$ die Energie ist, deren Wellenlänge zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt. Nach einmaliger Zurückwerfung vom bewegten Stempel werden die Wellenlängen der normal verlaufenden Strahlen um einen Betrag h verkürzt sein. Die neue Energievertheilung sei $f_1(\lambda)$. Denken wir uns die $\phi(\lambda)$ als Ordinaten, die λ als Abscissen aufgetragen, so werden wir die Punkte der neuen Curve $f(\lambda)$ erhalten, wenn wir für jedes λ zwei Drittel der zugehörigen Ordinate $\phi(\lambda)$ stehen lassen, entsprechend den unverändert gebliebenen zwei Dritteln der Energie. Das letzte Drittel hat man zu ersetzen durch ein Drittel der Ordinate ϕ, welche zu $\lambda + h$ gehört, weil ein Drittel der Energie seine Wellenlängen um h verkürzt hat. Es ist also

$$f_1(\lambda) = \frac{2}{3}\,\phi(\lambda) + \frac{1}{3}\,\phi(\lambda + h).$$

Nun ist bei kleinem h

$$\phi(\lambda + h) = \phi(\lambda) + h\phi'(\lambda),$$

also

$$f_1(\lambda) = \phi\left(\lambda + \frac{h}{3}\right)$$

nach einmaliger Zurückwerfung am Stempel B; nach $n$maliger wird hiernach

$$f_n(\lambda) = \phi\left(\lambda + \frac{n\,h}{3}\right) = f(\lambda),$$

wenn auch $n\,h$ klein gegen λ ist.

Hieraus folgt dann wieder

$$f(\lambda) = \phi(\lambda) + \frac{n\,h}{3}\,\phi'(\lambda)$$

$$= \frac{2}{3}\,\phi(\lambda) + \frac{1}{3}\,\phi(\lambda + n\,h).$$

Die Änderung in der Energievertheilung ist so, als ob die normal verlaufenden Strahlen, welche den dritten Theil der Gesammtenergie ausmachen, um den Betrag $n\,h$ ihre Wellenlängen verkürzt hätten.

Wir haben also n aufzufassen als die Zahl, welche angibt, wie oft die in dem Würfel normal zum Stempel verlaufenden Strahlen bei ihrem Hin- und Hergehen im Raum 2 von dem bewegten Stempel zurückgeworfen werden, während dieser eine bestimmte Wegstrecke durchläuft.

Ist $a - x$ die Entfernung B von C, so ist, während B um dx sich verschiebt,

$$n = \frac{dx}{2\,(a - x)} \cdot \frac{c}{v},$$

vorausgesetzt, dass n gross gegen die Einheit ist. Es muss also $\frac{c}{v}$ gross gegen $\frac{2\,(a - x)}{dx}$ sein; dabei soll aber doch dx klein gegen $2\,(a - x)$ sein.

Es war nun nach einmaliger Zurückwerfung

$$\lambda' = \frac{c - 2\,v}{c}\,\lambda.$$

Nach n maliger wird

$$\lambda_n = \left(\frac{c-2v}{c}\right)^n \lambda$$

$$= \left(\frac{c-2v}{c}\right)^{\frac{dx}{2(a-x)} \cdot \frac{c}{v}} \lambda$$

Diess lässt sich schreiben

$$\lambda_n = \left[\left(1-\frac{2v}{c}\right)^c\right]^{\frac{dx}{2(a-x)} \cdot \frac{1}{v}} \lambda$$

Hieraus wird für $\lim c = \infty$

$$\lambda_n = (e^{-2v})^{\frac{dx}{2(a-x)} \cdot \frac{1}{v}} \lambda = e^{-\frac{dx}{a-x}} \lambda$$

Man sieht, dass beim Zurückgehen des Stempels die Gleichung besteht

$$\lambda = \left(\frac{c+2v}{c}\right)^n \lambda_n = e^{\frac{dx}{a-x}} \lambda_n$$

Es geht also λ_n auch auf den ursprünglichen Werth zurück. Der Vorgang ist auch hierin umkehrbar. Wir setzen nun

$$\lambda_n = \lambda + nh,$$

wo nh unendlich klein von der Ordnung von dx ist; so wird bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$nh = -\frac{dx}{a-x} \lambda$$

Wir hatten nun

$$f(\lambda) = \phi\left(\lambda + \frac{nh}{3}\right) = \phi(\lambda + d\lambda).$$

Wir haben also zu setzen

$$d\lambda = -\frac{dx}{3(a-x)} \lambda.$$

Jeder Werth von λ wird um diesen Betrag kleiner, wenn x um dx wächst.

Durch Integration erhalten wir

$$\lg \lambda = \frac{1}{3} \lg(a-x) + \lg C$$

$$\lg C = \lg \lambda_0 - \frac{1}{3} \lg a,$$

wo λ_0 der Werth für $x = 0$ ist. Also

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{a-x}{a}} \cdot \lambda_0.$$

Ferner sei E das Energiequantum im Raum 2, wenn B bei x steht. Die Dichtigkeit der Energie ist dann

$$\psi = \frac{E}{a - x}.$$

Wächst x um dx, so nimmt die Dichtigkeit in Folge der Volumverkleinerung und der geleisteten Arbeit zu.

$$\frac{d\psi}{dx}\,dx = \left\{\frac{dE}{dx}\,\frac{1}{a-x} + \frac{E}{(a-x)^2}\right\} dx$$

$$= \left(\frac{dE}{dx} + \psi\right)\frac{dx}{a-x}$$

Nun ist der Druck auf den Stempel

$$= \frac{1}{3}\psi$$

Die geleistete Arbeit also

$$\frac{dE}{dx}\,dx = \frac{1}{3}\psi\,dx.$$

Diess gibt

$$d\psi = \frac{4}{3}\,\frac{\psi}{a-x}\,dx$$

$$\lg\psi = -\lg\left[(a-x)^{\frac{4}{3}}\right] + \lg C_1$$

$$\lg C_1 = \lg\psi_0 + \lg\left(a^{\frac{4}{3}}\right)$$

wo ψ_0 der Werth für $x = 0$ ist.

Es wird also

$$\psi = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{a-x}\right)^4}\cdot\psi_0$$

und nach dem frühern für gleiche Werthe von x

$$\frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

Nach §. 1 ist nun die Vertheilung der Energie ψ, welche von einem Körper mit der höheren Temperatur ϑ herrührt, die gleiche. Ist ϑ_0 der Werth von ϑ, welcher ψ_0 entspricht, so ist nach Stefan und Boltzmann

$$\frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\vartheta^4}{\vartheta_0^4}$$

Es folgt also

$$\vartheta\lambda = \vartheta_0\lambda_0$$

Im normalen Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers verschiebt sich mit veränderter Temperatur jede Wellenlänge so, dass das Product aus Temperatur und Wellenlänge constant bleibt.

Wenn die Vertheilung der Energie als Function der Wellenlänge für irgend eine Temperatur ϑ_0 gegeben ist, so lässt sie sich jetzt für jede andere Temperatur ϑ ableiten. Denken wir uns wieder die λ als Abscissen, die $\phi(\lambda)$ als Ordinaten aufgetragen. Der Flächeninhalt zwischen der Curve und der Abscissenaxe ist die Gesammtenergie ψ. Man hat nun zunächst jedes λ so zu verändern, dass $\lambda\vartheta$ constant bleibt. Schneidet man an der Stelle des ursprünglichen λ_0 ein schmales Stück von der Breite $d\lambda_0$ und dem Inhalt $\phi_0 d\lambda_0$ aus, so wird nach der Änderung diess Stück sich an die Stelle λ verschoben haben, aus der Breite $d\lambda_0$ ist $d\lambda = \frac{\vartheta_0}{\vartheta} d\lambda_0$ geworden. Da nun das Energiequantum $\phi_0 d\lambda_0$ constant bleiben muss, so ist

$$\phi d\lambda = \phi_0 d\lambda_0 \,. \quad \phi = \phi_0 \frac{d\lambda_0}{d\lambda} = \phi_0 \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \,.$$

Nun verändert sich ausserdem mit der Temperatur jedes ϕ nach dem Stefan'schen Gesetze im Verhältniss $\frac{\vartheta^4}{\vartheta_0^4}$, es wird also die neue Ordinate sein

$$\phi = \phi_0 \frac{\vartheta^5}{\vartheta_0^5} \,.$$

Auf diese Weise erhält man alle Punkte der neuen Energiecurve.

Es stimmt diess Ergebnis überein mit der von H. F. Weber[1] aus seinem Strahlungsgesetze abgeleiteten Verschiebung des Maximums der Energie.

[1] Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1888 S. 565.

Ausgegeben am 16. Februar.