Das freie Elektron im homogenen Magnetfeld nach der Diracschen Theorie.

Von **I. I. Rabi** *, zur Zeit in Hamburg.

(Eingegangen am 16. Mai 1928.)

Die Diracschen Gleichungen werden gelöst und die Eigenwerte und Eigenfunktionen diskutiert.

Die Diracsche Quantentheorie des Elektrons ergibt die richtige Duplizität und Spinkorrektion. Es wäre deshalb interessant, den einfachen Fall eines freien Elektrons in einem homogenen Magnetfeld zu untersuchen.

Die Diracschen** vier Gleichungen für die vier Funktionen $\psi_1 \ldots \psi_4$ lauten in unserem Falle

$$\left[p_0 + \varrho_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + \varrho_3 m c\right]\psi = 0 \tag{1}$$

mit

$$p_0 = \frac{W}{c}, \quad \boldsymbol{A} = {}^1/_2[\boldsymbol{H}\boldsymbol{r}], \quad p_i = \frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, 3.$$

ϱ_i und σ_i sind die Diracsche Matrixoperatoren.

Wir haben eindeutige und überall endliche Lösungen zu finden.

In zylindrischen Koordinaten (r, φ, z), deren z-Achse die Richtung des Feldes habe, wird (1)

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{W}{c} + m c\right)\psi_1 - i e^{-i\varphi}\left(h\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{h}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + w r\right)\psi_4 - i h\frac{\partial}{\partial z}\psi_3 &= 0,\\
\left(\frac{W}{c} + m c\right)\psi_2 - i e^{i\varphi}\left(h\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{h}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} - w r\right)\psi_3 + i h\frac{\partial}{\partial z}\psi_4 &= 0,\\
\left(\frac{W}{c} - m c\right)\psi_3 - i e^{-i\varphi}\left(h\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{h}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + w r\right)\psi_2 - i h\frac{\partial}{\partial z}\psi_1 &= 0,\\
\left(\frac{W}{c} - m c\right)\psi_4 - i e^{i\varphi}\left(h\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{h}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} - w r\right)\psi_1 + i h\frac{\partial}{\partial z}\psi_2 &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wo $w = \dfrac{eH}{2c}$ und h statt $\dfrac{h}{2\pi}$ gesetzt ist.

Eine partikulare Lösung sei

$$\psi_s = F_s(r)\, e^{i n_s \varphi + i\frac{p}{h}z} \qquad s = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

---

* Barnard Fellow, Columbia University.

** P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **117**, 610, 1928.

p ist der konstante Impuls parallel zum Felde und die n_s sind ganze Zahlen (wegen der Eindeutigkeit).

Setzen wir (3) in (2) ein, so ergibt der Vergleich der Exponenten von e

$$p \text{ willkürlich}, \quad n_1 = n_3, \quad n_2 = n_4, \quad n_2 = n_1 + 1. \tag{4}$$

Also ist nur eine der Größen n_s frei wählbar; als solche nehmen wir n_2.

Wenn wir setzen

$$F_s = e^{-\frac{w}{2h} r^2} R_s(r), \tag{5}$$

so wird aus (2)

$$\left.\begin{aligned}
r\frac{d}{dr}R_1 &= (n_2-1)\,R_1 + \frac{2w}{h}r^2R_1 + i\frac{p}{h}r\,R_2 - \frac{i}{h}\left(\frac{W}{c} - m\,c\right)r\,R_4 = 0,\\
r\frac{d}{dr}R_2 &= -\frac{i\,p}{R}r\,R_1 - n_2R_2 - \frac{i}{h}\left(\frac{W}{c} - m\,c\right)r\,R_3 = 0,\\
r\frac{d}{dr}R_3 &= -\frac{i}{h}\left(\frac{W}{c} + m\,c\right)r\,R_2 + (n_2-1)\,R_3 + 2\frac{w}{h}r^2R_3 + \frac{i}{h}p_r R_4 = 0,\\
r\frac{d}{dr}R_4 &= -\frac{i}{h}\left(\frac{W}{c} + m\,c\right)r\,R_1 - \frac{i}{h}p\,r\,R_3 - n_2R_4 = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

In diese Gleichungen gehen wir mit dem Ansatz

$$R_s = r^\alpha \sum_0^\infty c_\nu^{(s)} r^\nu \tag{7}$$

ein. Der Vergleich der Potenzen von r^α gibt eine Gleichung vierten Grades mit den beiden Doppelwurzeln

$$\alpha = \begin{cases} n_2 - 1 \\ -n_2 \end{cases} \tag{8}$$

und der Vergleich derjenigen von $r^{\alpha+\nu}$

$$\left.\begin{aligned}
&[\alpha+\nu-(n_2-1)]\,C_\nu^{(1)} - \frac{2w}{h}C_{\nu-2}^{(1)} - \frac{i\,p}{h}C_{\nu-1}^{(2)}\\
&\qquad\qquad + \frac{i}{h}\left(\frac{W}{c} - m\,c\right)C_{\nu-1}^{(4)} = 0,\\
&\frac{i\,p}{h}C_{\nu-1}^{(1)} + (\alpha+\nu+n_2)\,C_\nu^{(2)} + \frac{i}{h}\left(\frac{W}{c} - m\,c\right)C_{\nu-1}^{(3)} = 0,\\
&\frac{i}{h}\left(\frac{W}{c} + m\,c\right)C_{\nu-1}^{(2)} + [\alpha+\nu-(n_2-1)]\,C_\nu^{(3)} - \frac{2w}{h}C_{\nu-2}^{(3)}\\
&\qquad\qquad - \frac{i}{h}p\,C_{\nu-1}^{4} = 0,\\
&\frac{i}{h}\left(\frac{W}{c} + m\,c\right)C_{\nu-1}^{(1)} + \frac{i}{h}p\,C_{\nu-1}^{(3)} + (\alpha+\nu+n_2)\,C_\nu^{(4)} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Man sieht zunächst, daß für $\alpha = n_2$ in R_1 und R_3 die ungeraden Koeffizienten und in R_2 und R_4 die geraden Koeffizienten verschwinden müssen, umgekehrt für $\alpha = -n_2$.

Für das Verhältnis zweier sukzessiver Koeffizienten findet man

$$\left.\begin{aligned} \frac{C_\nu^{(1)}}{C_{\nu-2}^{(1)}} &= \frac{C_\nu^{(3)}}{C_{\nu-2}^{(3)}} = \frac{1}{h^2}\,\frac{2\,w\,h\,[(\alpha+\nu+n_2-1)-2\,j]}{(\alpha+\nu+n_2-1)\,(\alpha+\nu-n_2+1)}, \\ \frac{C_{\nu+1}^{(2)}}{C_{\nu-1}^{(2)}} &= \frac{C_{\nu+1}^{(4)}}{C_{\nu-1}^{(4)}} = \frac{1}{h^2}\,\frac{2\,w\,h\,[(\alpha+\nu+n_2-1)-2\,j]}{(\alpha+\nu+n_2+1)\,(\alpha+\nu-n_2+1)}, \\ \frac{C_{\nu+1}^{(2)}}{C_\nu^{(1)}} &= \frac{p+\frac{1}{k}\left(\frac{W}{c}-mc\right)}{(\alpha+\nu+n_2-1)}, \quad \frac{C_{\nu+1}^{(4)}}{C_\nu^{(1)}} = \frac{\frac{p}{k}+\left(\frac{W}{c}+mc\right)}{\alpha+\nu+n_2+1} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

mit der Abkürzung

$$2\,w\,h\,j = \frac{W^2}{c^2} - m^2\,c^2 - p^2.$$

R_1 und R_3 stehen demnach in einem konstanten Verhältnis k.

Damit die Lösung im Nullpunkt endlich bleibt, müssen die Reihen (7) mit nicht negativen Potenzen beginnen. Für $n_2 \geqq 0$ haben wir also $\alpha = n_2 - 1$ und für $n_2 \leqq 0$, $\alpha = -n_2$ zu nehmen.

Die Funktionen R_s folgen unmittelbar aus (10). Sie sind durch entartete hypergeometrische Reihen

$$F(\alpha, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha}{1\,.\,\beta}\,x + \frac{\alpha\,(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\beta\,(\beta+1)}\,x^2 + +$$

darstellbar. Zum Beispiel ist die Reihe für R_1 im Falle $\alpha = n_2 - 1$, $n_2 > 0$

$$R_1 = r^{n_2-1}\,F\left(-j+n_2, n_2, \frac{w}{h}\,r^2\right).$$

Die Reihen brechen dann und nur dann ab, wenn j eine ganze Zahl $\geqq n_2$ ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so werden nach (5) die Eigenfunktionen exponentiell im Unendlichen anwachsen*. Also muß j eine ganze nicht negative Zahl größer oder gleich n_2 sein.

Infolge der Mehrfachheit und der ganzzahligen Differenzen der Wurzeln α gibt es auch andere Lösungen von (6), die durch

$$\left(\frac{\partial R_s}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1}, \quad \left(\frac{\partial^2 R_s}{\partial\alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_2}, \quad \left(\frac{\partial^2 R_s}{\partial\alpha^3}\right)_{\alpha=\alpha_2}$$

* W. Gordon, ZS. f. Phys. **48**, 11, 1928.

gegeben sind, wo α_1 die größere der beiden Wurzeln (α_1 und α_2) ist. Diese Lösungen befriedigen aber nicht die Konvergenzbedingungen im Unendlichen.

Die Eigenfunktionen lauten für $n_2 > 0$

$$\Psi_1 = k\Psi_3 = C_0 e^{-\frac{w}{2h}r^2} r^{n_2-1} F\left(-j+n_2, n_2, \frac{w}{h}r^2\right) e^{i(n_2-1)\varphi + \frac{i}{h}pz},$$

$$\Psi_2 = C_0\left(\frac{-i}{h\,n_2}\right)\left[p + \frac{1}{k}\left(\frac{W}{c} - mc\right)\right] e^{-\frac{w}{2h}r^2} r^{n_2} F\left(-j+n_2, n_2+1, \frac{w}{h}r^2\right) e^{in_2\varphi + \frac{ip}{h}z},$$

$$\Psi_4 = C_0\left(\frac{-i}{h\,n_2}\right)\left(\frac{p}{k} + \frac{W}{c} + mc\right) e^{-\frac{w}{2h}r^2} r^{n_2} F\left(-j+n_2, n_2+1, \frac{w}{h}r^2\right) e^{in_2\varphi + \frac{ip}{h}z}$$

und für $n_2 \leqq 0$

$$\Psi_1 = k\Psi_3 = C_0 e^{-\frac{w}{2h}r^2} r^{-n_2} \frac{d}{dr} F\left(-j, -n_2+1, \frac{w}{h}r^2\right) e^{i(n_2-1)\varphi + \frac{ip}{h}z},$$

$$\Psi_2 = C_0\left(\frac{-1}{h}\right)\left[p + \frac{1}{k}\left(\frac{W}{c} - mc\right)\right] e^{-\frac{w}{2h}r^2} r^{-n_2} F\left(-j, -n_2+1, \frac{w}{h}r^2\right) e^{in_2\varphi + \frac{ip}{h}z}$$

$$\Psi_4 = C_0\left(\frac{-1}{h}\right)\left(\frac{p}{k} + \frac{W}{c} + mc\right) e^{-\frac{w}{2h}r^2} r^{-n_2} F\left(-j, -n_2+1, \frac{w}{h}r^2\right) e^{in_2\varphi + \frac{ip}{h}z}.$$

Solche Eigenfunktionen kann man bekanntlich auch durch Laguerresche Polynome ausdrücken. Für einen vorgegebenen Wert von j gibt es unendlich viele Eigenfunktionen, weil n_2 alle ganzzahligen Werte gleich oder kleiner als n_2 annehmen kann. Diese Tatsache entspricht der beliebigen Wahl der Lage der z-Achse.

Die Eigenwerte

$$\frac{W^2}{c^2} - m^2c^2 - p^2 = 4jwh, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

nach Potenzen von $1/c$ entwickelt, sind

$$W = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + 2j\omega h + \cdots,$$

wo $\omega = \dfrac{eH}{4\pi mc}$ die Lamorfrequenz und h die Plancksche Konstante bedeuten.

Die Schrödingersche Theorie (unmagnetisches Elektron) ergibt dieselben Eigenwerte mit $(j + \frac{1}{2})$ statt j, also darf dort die Energie der Bewegung um die Feldrichtung nicht Null werden. Unsere Ergebnisse kann man als eine Aufspaltung der Eigenwerte des unmagnetischen Elektrons durch die Einstellung des Elektrons parallel und antiparallel zum Felde deuten.

Es ist merkwürdig, daß der Ausdruck für die Komponente des Stromes um die Feldachse,

$$J_1 = \psi_1 \psi_4^* + \psi_4 \psi_1^* + \psi_2 \psi_3^* + \psi_3 \psi_2^*$$
$$J_2 = i(\psi_1 \psi_4^* - \psi_1^* \psi_4) - i(\psi_2 \psi_3^* - \psi_2^* \psi_3),$$

im untersten Zustand, wo die Energie des Elektrons nur aus der kinetischen Energie der Bewegung parallel zum Felde besteht, im ganzen Raum verschwindet. Wenn man sich diesen Zustand so vorstellt, daß die potentielle Energie des Elektroneneigenmoments und die Energie der Bewegung um die Feldachse sich gegenseitig aufheben, ist nicht zu erwarten, daß diese Komponente überall verschwindet. In der Diracschen Theorie ist es eben prinzipiell nicht erlaubt, die Translationsbewegung des Elektrons von seiner Rotationsbewegung zu trennen.